

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = 5.$$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η δοσμένη ισότητα γράφεται $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$, οπότε $2\alpha\beta = 2$. Άρα $\alpha\beta = 1$.

β) Με $\alpha\beta = 1$, έχουμε:

$$(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = (1 - 2)^6 + (1 + 1)^2 = (-1)^6 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της συνάρτησης παίρνουμε:

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ και } f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

οπότε $f(-2) > f(1)$, αφού $5 > 2$.

β) Είναι:

$$f(x) = f(1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και 1 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία M(3,3) και N(1, 1) ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν $x - 2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 2$. Άρα, $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Επειδή $f(3) = \frac{3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$ το σημείο $M(3,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

Επιπλέον, $f(1) = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 \neq 1$, οπότε το σημείο $N(1,1)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Με $x \neq 2$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x - 2 \Leftrightarrow x = -2$$

οπότε η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό -2 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{16} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(2)=|2-3|+4=|-1|+4=1+4=5, \quad f(3)=|3-3|+4=4 \quad \text{και} \quad f(4)=|4-3|+4=|1|+4=1+4=5$$

β) Η εξίσωση $f(x)=3$ γράφεται $|x-3|+4=3$ και είναι ισοδύναμη με την $|x-3|=-1$. Η τελευταία εξίσωση όμως είναι αδύνατη, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή να είναι αρνητική.

γ) i. Με $x \geq 3$ έχουμε: $x-3 \geq 0$, οπότε $|x-3|=x-3$. Άρα, $f(x)=x-3+4=x+1$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με $x \geq 3$ είναι:

$$\frac{x^2}{16} + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + x = x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ή } x = 4$$

Η λύση $x = -4$ απορρίπτεται, αφού $x \geq 3$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 4$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $|x - 5| = 6$ (I)

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -1 είναι λύση της (I).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (I).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Παρατηρούμε ότι $|-1 - 5| = |-6| = 6$.

β) Οι αριθμοί που έχουν απόλυτη τιμή ίση με 6, είναι το 6 και το -6 . Ώστε

$x - 5 = 6$ ή $x - 5 = -6$. Οπότε έχουμε $x = 5 + 6 = 11$ ή $x = -6 + 5 = -1$.

Έτσι, αποδείξαμε ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις εκτός από τους αριθμούς 11 και -1 .

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο 5, 9, 13, 17,

α) Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της αριθμητικής προόδου;

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον 51^ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Παρατηρούμε ότι $9 - 5 = 13 - 9 = 17 - 13 = \dots = 4$. Έστω $\omega = 4$.

β) Καθώς ο νιοστός όρος σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) δίνεται από τη σχέση

$$a_n = a_1 + (n - 1)\omega, \text{ έχουμε } a_{51} = 5 + (51 - 1)4 = 5 + 50 \cdot 4 = 205.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - x - 12$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $x^2 - x - 12 \leq 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

α) Παρατηρούμε ότι το δοθέν τριώνυμο είναι στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma$ με

$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -12$. Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2.$$

$$\text{Οπότε οι ρίζες του τριωνύμου είναι } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm 7}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}.$$

Έτσι οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{1+7}{2} = 4$ και $x_2 = \frac{1-7}{2} = -3$.

β) Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+	-	+

Καθώς είναι $\alpha = 1 > 0$, παρατηρούμε ότι είναι $x^2 - x - 12 \leq 0$ για $-3 \leq x \leq 4$, δηλαδή λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος $[-3, 4]$.

γ) Οι ακέραιες λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα $[-3, 4]$, δηλαδή οι αριθμοί $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x| \leq 9$ (I) και $7x - 8 \geq -3(x - 4)$ (II).

α) Να λυθεί η ανίσωση (I).

(Μονάδες 7)

β) Να λυθεί η ανίσωση (II).

(Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να βρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή όχι μεγαλύτερη του 9, δηλαδή τους αριθμούς που απέχουν από το μηδέν απόσταση το πολύ 9.

Άρα λύσεις της ανίσωσης (I) είναι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει

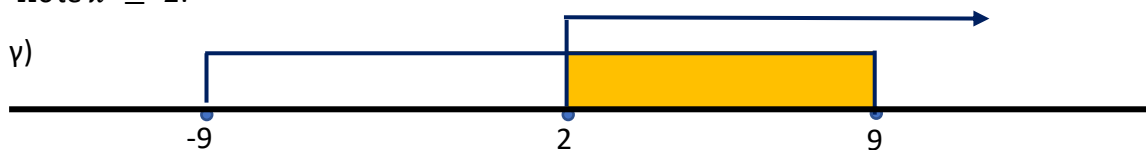
$$-9 \leq x \leq 9.$$

β) Εκτελώντας επιμεριστική ιδιότητα στο 2^ο μέλος της ανίσωσης (II), παίρνουμε:

$$7x - 8 \geq -3x + 12 \Leftrightarrow 7x + 3x \geq 8 + 12 \Leftrightarrow 10x \geq 20 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{10}.$$

Ώστε $x \geq 2$.

γ)



Με βάση την παραπάνω γεωμετρική παράσταση των λύσεων, διαπιστώνουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x με $2 \leq x \leq 9$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_4 = 7$ και $\alpha_5 = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο 36.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της. Επομένως $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 9 - 7 = 2$.

β) Έχουμε $\alpha_4 = 7$ επομένως $\alpha_1 + 3\omega = 7$ δηλαδή $\alpha_1 + 6 = 7$ άρα $\alpha_1 = 1$

γ) Για το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου ισχύει $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \frac{(2\alpha_1 + 5\omega)6}{2} = (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2)3 = 12 \cdot 3 = 36$

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x + 8| = 10$ επαληθεύεται για $x=2$, $x=0$ και $x=-10$

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 8| = 10$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $|x + 8| = 10$.

Για $x=2$ γίνεται $|2 + 8| = 10 \Leftrightarrow |10| = 10$ που ισχύει επομένως η τιμή $x=2$ ικανοποιεί την εξίσωση.

Για $x=0$ γίνεται $|0 + 8| = 10 \Leftrightarrow |8| = 10$ που δεν ισχύει επομένως η τιμή $x=0$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση.

Για $x=-10$ γίνεται $|-10 + 8| = 10 \Leftrightarrow 0 = 10$ που δεν ισχύει επομένως η τιμή $x=-10$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση.

β) Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $|x + 8| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8 = 10 \\ \text{ή} \\ x + 8 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = -18 \end{cases}$ δεκτές.

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $1, 2, 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $1, x, 4$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πράγματι οι αριθμοί 1, 2, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $2^2 = 1 \cdot 4$.

β) Αφού οι αριθμοί 1, x, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα ισχύει:

$x^2 = 1 \cdot 4$ δηλαδή $x^2 = 4$ επομένως $\sqrt{x^2} = 4$ οπότε $|x| = 2$ άρα $x = \pm 2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 1$, $a_3 = 7$ και διαφορά ω .

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) είναι ίσος με $a_n = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ και να βρείτε τον 6^ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 12)

γ) Υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) που να ισούται με 21;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για την αριθμητική πρόοδο (a_n) έχουμε $a_3 = 7$ δηλαδή $a_1 + 2\omega = 7$ οπότε $1 + 2\omega = 7$ επομένως $2\omega = 6$ άρα $\omega = 3$.

β) Για το n -οστό όρο της αριθμητικής προόδου (a_n) ισχύει ο τύπος $a_n = a_1 + (n - 1)\omega$. Με αντικατάσταση των a_1 και ω ο τύπος γίνεται $a_n = 1 + (n - 1)3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

Για τον 6^ο όρο της αριθμητικής προόδου αντικαθιστούμε στον γενικό τύπο όπου $n=6$ και έχουμε $a_6 = 3 \cdot 6 - 2 = 18 - 2 = 16$.

γ) Αν υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) που να ισούται με 21 θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 21$ δηλαδή $3n - 2 = 21$ επομένως $3n = 23$ άρα $n = \frac{23}{3}$. Όμως ο αριθμός $\frac{23}{3} \notin \mathbb{N}$, επομένως δεν υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) που να ισούται με 21.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2+4x+4=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$.

Οπότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Οπότε έχουμε: $x = \frac{-4 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους αριθμούς $2, 4, 6, \dots$ που συνεχίζονται, προσθέτοντας κάθε φορά το 2.

α) i) Ποιος είναι ο επόμενος αριθμός;

(Μονάδες 5)

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια η διαφορά ω της προόδου αυτής;

(Μονάδες 10)

β) Ο αριθμός 2 είναι ο 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος. Να βρεθεί ο 8ος όρος της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) ι) Ο επόμενος αριθμός θα είναι ο $6+2 = 8$.

ιι) Οι αριθμοί αυτοί έχουν σταθερή διαφορά. Δηλαδή καθένας από τον επόμενο του διαφέρει κατά 2, αφού: $4-2 = 2$ και $6-4 = 2$.

Συνεπώς, πρόκειται για διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=2$.

β) Εφόσον $\alpha_1=2$, $\omega=2$, έχουμε ότι ο n -οστός όρος θα δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega, \text{ δηλαδή } \alpha_n = 2 + (n-1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n.$$

Συνεπώς, ο 8ος όρος θα είναι $\alpha_8 = 2 \cdot 8 = 16$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης που λύσατε στο ερώτημα (β).

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα:

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

οπότε οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι $x=6$ ή $x=1$.

β) Η ανίσωση $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$ είναι μικρότερο ή ίσο του μηδέν.

Μεταξύ των ριζών του ένα τριώνυμο είναι ετερόσημο του συντελεστή του x^2 , ο οποίος στο τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$ είναι 1, δηλαδή θετικός. Οπότε το τριώνυμο μεταξύ των αριθμών 1 και 6 είναι αρνητικό.

Συνεπώς, λύσεις της ανίσωσης είναι οι πραγματικοί αριθμοί $1 \leq x \leq 6$.

Σε μορφή διαστήματος $x \in [1, 6]$.

γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι αριθμοί στο διάστημα $[1, 6]$ δηλαδή οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|3x - 6| < 15$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 6| \geq 1$ και να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε (σχεδιάζοντας) τις λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) σε έναν άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |3x - 6| < 15 &\in \\ -15 < 3x - 6 < 15 &\in \\ 6 - 15 < 3x < 15 + 6 &\in \\ \frac{-9}{3} < x < \frac{21}{3} &\in \\ -3 < x < 7 & \end{aligned}$$

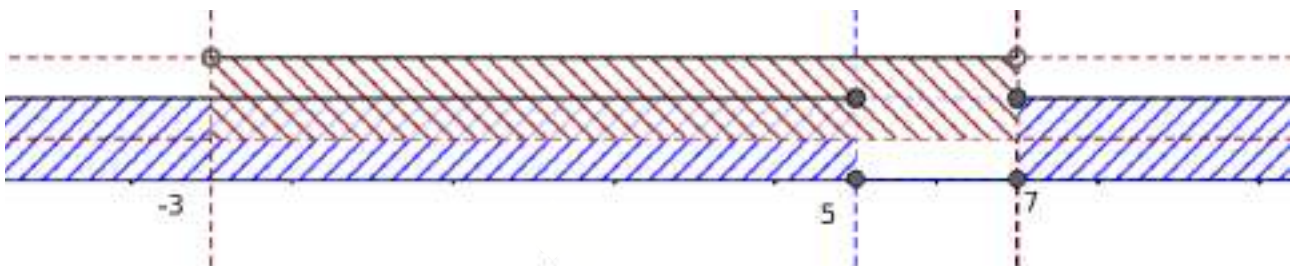
Συνεπώς οι λύσεις της σνίσωσης είναι $x \in (-3, 7)$.

β) Ισοδύναμα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |x - 6| &\geq 1 \in \\ x - 6 &\leq -1 \text{ ή } x - 6 \geq 1 \in \\ x &\leq 5 \text{ ή } x \geq 7 \end{aligned}$$

Συνεπώς οι λύσεις της σνίσωσης είναι $x \in (-\infty, 5] \cup [7, +\infty)$.

γ) Αναπαριστώντας τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε:



Συνεπώς, οι κοινές λύσεις είναι $x \in (-3, 5]$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 6 είναι λύση της εξίσωσης $|x-9|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-9|=3$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση όπου x το 6 :

$$|6-9|=3 \Leftrightarrow |-3|=3 \Leftrightarrow 3=3 \text{ ισχύει.}$$

Άρα ο αριθμός 6 επαληθεύει την εξίσωση, οπότε είναι λύση της.

$$\beta) \text{ Λύνουμε την εξίσωση } |x-9|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-9=3 \\ \text{ή} \\ x-9=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ \text{ή} \\ x=6 \end{cases} \text{ δεκτές.}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5x + 4 = 0$ (1).

α) Να ελέγξετε αν ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) .

(Μονάδες 17)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1) το $x=4$:

$$4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 20 - 20 = 0. \text{ Άρα το } 4 \text{ επαληθεύει την (1).}$$

β) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=4$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.

Επειδή η διακρίνουσα είναι θετική η (1) θα έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases} \text{ δεκτές.}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $3(2x + 1) + 6 < 21$ (1)

και $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ (2) .

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι :

$$3(2x + 1) + 6 < 21 \Leftrightarrow 6x + 3 + 6 < 21 \Leftrightarrow 6x < 12 \Leftrightarrow x < 2.$$

β)

i. Η εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ είναι δευτεροβάθμια με $\alpha=1, \beta=-2$ και $\gamma=-3$ και διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16 > 0$, οπότε έχει δύο άνισες ρίζες

$$x_1 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3 \text{ και } x_2 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=-1$ ή $x=3$.

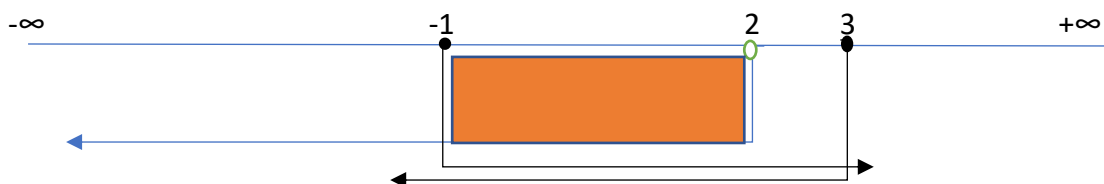
ii. Η ανίσωση (2) είναι δευτεροβάθμια με ρίζες τριώνυμου τις λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος i, με $\alpha=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση (2), $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ αληθεύει

για $-1 \leq x \leq 3$.

γ) Τοποθετούμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα πραγματικών αριθμών βρίσκουμε που συναληθεύουν σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Άρα οι κοινές λύσεις είναι το διάστημα $[-1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 4ος όρος είναι ο $\alpha_4=10$ και ο 5ος όρος είναι ο $\alpha_5=7$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου (α_n) είναι $\omega = -3$ και να βρείτε τον 1ο όρο της προόδου α_1 .

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε στην αριθμητική πρόοδο ο επόμενος όρος διαφέρει από τον προηγούμενο κατά ω . Άρα $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 7 - 10 = -3$.

Για να βρούμε τον πρώτο όρο παίρνουμε τον τύπο του νιοστού όρου

$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ και τον εφαρμόζουμε για τον 4^ο όρο.

Συνεπώς $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 10 = \alpha_1 + 3(-3) \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 + 9 \Leftrightarrow \alpha_1 = 19$.

β) Για να βρούμε τον 8^ο όρο της προόδου (α_n) παίρνουμε τον τύπο του νιοστού όρου $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.

Συνεπώς, $\alpha_8 = \alpha_1 + 7\omega \Leftrightarrow \alpha_8 = 19 + 7(-3) \Leftrightarrow \alpha_8 = -2$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |x + 1|$ για $x = -2$ και για $x = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 1| = 2$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για $x = -2$ είναι $A = |-2 + 1| = |-1| = 1$.

Για $x = 1$ είναι $A = |1 + 1| = |2| = 2$.

β) Από την εξίσωση $|x + 1| = 2$ προκύπτει ότι:

$$x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

ή

$$x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 1$ ή $x = -3$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_5 = 18$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 4$ και ότι ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 32.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ο γενικός όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$. Οπότε οι σχέσεις $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_5 = 18$ γράφονται:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 10 \\ \text{και} \\ \alpha_5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + (3 - 1)\omega = 10 \\ \text{και} \\ \alpha_1 + (5 - 1)\omega = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 10 & (1) \\ \text{και} \\ \alpha_1 + 4\omega = 18 & (2) \end{cases}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (1) από τη (2) προκύπτει ότι:

$$\alpha_1 + 4\omega - (\alpha_1 + 2\omega) = 18 - 10 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 4\omega - \alpha_1 - 2\omega = 8 \Leftrightarrow$$

$$2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4.$$

Από τη σχέση $\alpha_1 + 2\omega = 10$, για $\omega = 4$ έχουμε:

$$\alpha_1 + 2 \cdot 4 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2.$$

β) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου δίνεται από τη σχέση

$S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$. Για $n = 4$, $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 4$ η σχέση γίνεται:

$$S_4 = \frac{4}{2}[2 \cdot 2 + (4 - 1)4] = 2[4 + 3 \cdot 4] = 2 \cdot 16 = 32.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-1|=4$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1). Να βρείτε τα S και P.

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο $A(\rho, 5)$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης (1) ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε την τιμή του ρ .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $|x - 1| = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{cases}$.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση (1) θα πρέπει το S να είναι το άθροισμα των δύο ριζών της (1) και P το γινόμενό τους. Επομένως S=2 και P=-15

γ) Για να ανήκει το A στο πρώτο τεταρτημόριο πρέπει να έχει θετικές συντεταγμένες. Έχει τεταγμένη ίση με 5>0 επομένως πρέπει να έχει και θετική τετμημένη. Άρα πρέπει ρ=5.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $-1 \leq x \leq 2$.

α) Να γράψετε την παράσταση $A = |x + 1| - |x - 2|$ απαλείφοντας κατάλληλα τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 13)

β) Αν $A = 2x + 3$ να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Από $-1 \leq x \leq 2$ έχουμε $|x + 1| = x + 1$ και $|x - 2| = -x + 2$,

τότε $A = x + 1 - (-x + 2) = 2x + 3$.

β) $A = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 > 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\alpha_1 = -\frac{3}{2}$ και $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του β ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Από το τριώνυμο έχουμε $\alpha=1$, $\beta=-3$ και $\gamma=2$. Προκύπτει

$\Delta=(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες

$$x_1 = \frac{-(-3)+1}{2} = 2 \text{ και } x_2 = \frac{-(-3)-1}{2} = 1.$$

Άρα το τριώνυμο γίνεται $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

β) Από το α ερώτημα βρήκαμε τις λύσεις του τριωνύμου $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

Το $\alpha=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	- 0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2 - 3x + 2 > 0$ αληθεύει

για $x < 1$ ή $x > 2$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί που ανήκουν στο σύνολο

$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

γ) Παρατηρούμε πως το $\alpha_1 = -\frac{3}{2} \in (-\infty, 1)$ γιατί $-\frac{3}{2} < 1$ ενώ το $\alpha_2 = \frac{3}{2} \notin (-\infty, 1)$ και $\alpha_2 = \frac{3}{2} \notin (2, +\infty)$ γιατί $1 < \frac{3}{2} < 2$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω α πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 2)^2 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Από την ισότητα $\alpha^2 = 4(\alpha - 1)$ παίρνουμε $\alpha^2 = 4\alpha - 4$, οπότε $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$. Άρα,
 $(\alpha - 2)^2 = 0$.

β) Είναι:

$$(\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Άρα, $\alpha = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$.

(Μονάδες 14)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία $A(2,7)$ και $B(0,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f .

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ και $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$.

β) Ένα σημείο (x, y) του επιπέδου ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f αν και μόνο αν $y = f(x)$. Επειδή από το ερώτημα α) έχουμε $f(2) = 7$ και $f(0) = -1$, βλέπουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B πληρούν τη συγκεκριμένη συνθήκη οπότε ανήκουν στην C_f .

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι $\Delta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση;

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$. Οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

β) Επειδή $\Delta = 1 > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

γ) Η εξίσωση έχει ρίζες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3(x-1) > x+3 \quad (1) \text{ και}$$

$$|x| \leq 4 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$3(x-1) > x+3, \text{ δηλαδή}$$

$$3x-3 > x+3, \text{ δηλαδή}$$

$$3x-x > 3+3, \text{ οπότε}$$

$$2x > 6, \text{ οπότε}$$

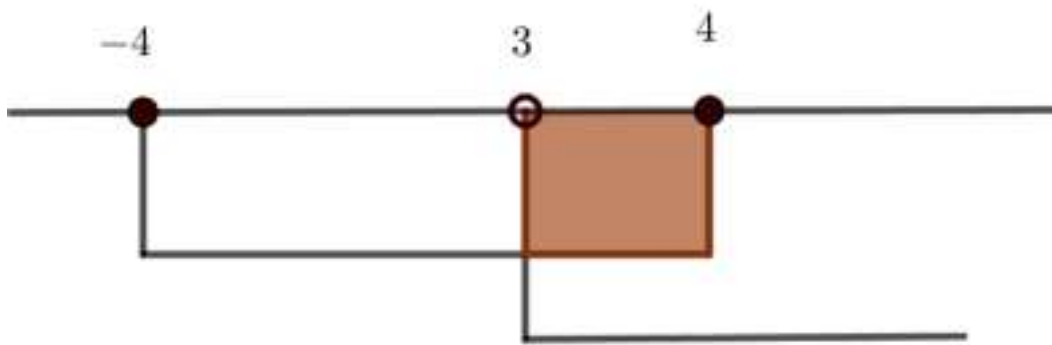
$$x > \frac{6}{2} \text{ και τελικά}$$

$$x > 3.$$

β) Έχουμε:

$$|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ως εξής:



Οπότε οι κοινές τους λύσεις είναι οι πραγματικοί αριθμοί x μεταξύ 3 και 4 (και το 4), δηλαδή $x \in (3, 4]$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$ οπότε

έχει δύο ρίζες άνισες, τη $x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$ και τη

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

β) Το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 4$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 οπότε παραγοντοποιείται ως εξής: $2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 2)(x - 1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$.

α) Να δείξετε ότι το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x + 12 < 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι ισχύει $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί 3 και 4 έχουν άθροισμα $S = 3 + 4 = 7$ και γινόμενο $P = 3 \cdot 4 = 12$ οπότε θα είναι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - Sx + P$ δηλαδή του $x^2 - 7x + 12$.

Εναλλακτικά με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι οι αριθμοί 3 και 4 είναι όντως ρίζες του τριωνύμου, δηλαδή το μηδενίζουν.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει δύο ρίζες άνισες, τους αριθμούς 3 και 4 και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι 1, δηλαδή θετικός, το τριώνυμο γίνεται αρνητικό μόνο για κάθε πραγματικό αριθμό που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του 3 και 4. Συνεπώς είναι $x^2 - 7x + 12 < 0$ για κάθε $x \in (3, 4)$.

γ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ ισχύει ότι $\pi \in (3, 4)$ οπότε από το β) ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με πρώτους όρους τους - 4, - 1, 2, 5, 8,

α) Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος αυτής της προόδου δίνεται από τη σχέση $a_n = 3n - 7$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίστε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = -4$ και η διαφορά ω είναι $\omega = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$, οπότε ο γενικός όρος της προόδου θα είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega = -4 + (n - 1) \cdot 3 = -4 + 3n - 3 = 3n - 7.$$

β) Αφού η διαφορά ω είναι 3, διαπιστώνουμε ότι οι 10 πρώτοι όροι της προόδου θα είναι οι αριθμοί - 4, - 1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 των οποίων το άθροισμα είναι

$$S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] = \frac{10}{2} [2 \cdot (-4) + 9 \cdot 3] = 5 \cdot (-8 + 27) = 5 \cdot 19 = 95.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 - x - 5$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο αυτό έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίστε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών αυτών.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 1 + 60 = 61 > 0$, άρα το τριώνυμο έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Αφού $\Delta > 0$, οι δύο ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου είναι οι $\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{61}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6}$

δηλαδή $x_1 = \frac{1 - \sqrt{61}}{6}$ και $x_2 = \frac{1 + \sqrt{61}}{6}$.

γ) Έχουμε $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(2)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 7$ και να γράψετε τη λύση της σε διάστημα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

β) Έχουμε: $f(x) \geq 7 \Leftrightarrow 2x + 3 \geq 7 \Leftrightarrow 2x \geq 7 - 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{2} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Άρα $x \in [2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 3x - 4 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x - 4 < 0$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$, οπότε έχει δύο άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1 \end{cases}.$$

β) Επειδή ο συντελεστής a του x^2 είναι $1 > 0$, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές για $x \in (-4, 1)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_2 = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $a_{20} = 59$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\omega = \alpha_{n+1} - \alpha_n$.

Άρα: $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 5 - 2 \Leftrightarrow \omega = 3$.

β) Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \omega$.

Επομένως: $\alpha_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 3 = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = 59$.

Άρα: $\alpha_{20} = 59$.

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta + 1}{6}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha = \beta + 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\beta = -3$ να βρείτε τον α .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με 6 και έχουμε:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta + 1}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{\alpha}{3} = 6 \cdot \frac{\beta + 1}{6}.$$

Η τελευταία σχέση μετά τις απλοποιήσεις γίνεται $2\alpha = \beta + 1$.

β) Για $\beta = -3$ η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$2\alpha = -3 + 1$$

ή ισοδύναμα:

$$\alpha = \frac{-2}{2} = -1.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 4$.

α) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία ε :

$A(-1,2)$, $B(6,1)$, $\Gamma(1,6)$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-2,0)$.

(Μονάδες 7)

γ) Σχεδιάστε την ευθεία ε στο καρτεσιανό επίπεδο.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να ανήκει ένα σημείο στην ευθεία πρέπει οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν την εξίσωσή της.

- Για το σημείο $A(-1,2)$ είναι $x = -1$ και $y = 2$. Οπότε, πρέπει:

$$2 = 2 \cdot (-1) + 4 \Leftrightarrow 2 = 2,$$

που ισχύει, άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία.

- Για το σημείο $B(6,1)$ είναι $y = 1$ και $x = 6$. Οπότε πρέπει:

$$1 = 2 \cdot 6 + 4 \Leftrightarrow 1 = 16,$$

που δεν ισχύει, άρα το σημείο B δεν ανήκει στην ευθεία.

- Για το σημείο $\Gamma(1,6)$ είναι $y = 6$ και $x = 1$. Οπότε πρέπει:

$$6 = 2 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 6 = 6,$$

που ισχύει, άρα το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία.

β) Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωση της ευθείας $y = 0$, οπότε έχουμε:

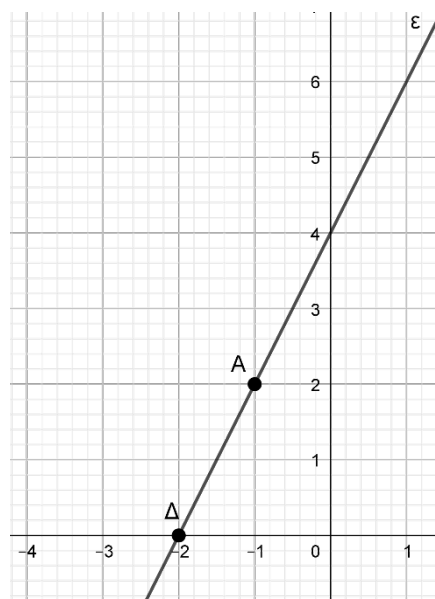
$$0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -2x = 4,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$x = \frac{4}{-2} = -2.$$

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $\Delta(-2,0)$.

γ) Σημειώνουμε στο καρτεσιανό επίπεδο δύο από τα σημεία της ευθείας που βρήκαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, π.χ. τα $A(-1,2)$ και $\Delta(-2,0)$ και τη σχεδιάζουμε όπως στο ακόλουθο σχήμα:



ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + x - 12$ (1).

(Μονάδες 8)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι $x_1 = 3$ και $x_2 = -4$, να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 12 < 0$ και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x - 12$ είναι :

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 \text{ και οι ρίζες:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}.$$

β) Το πρόσημο του τριωνύμου (1) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
$x^2 + x - 12$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-4,3)$. Δηλαδή $x \in (-4,3)$.

γ) Αφού $x \in (-4,3)$ και θέλουμε συγχρόνως να είναι ακέραιοι, τότε οι τιμές του x που ικανοποιούν και τις δύο σχέσεις είναι: $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) με $a_3 = -8$ και $a_6 = -64$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος είναι $\lambda = 2$ και ο πρώτος όρος $a_1 = -2$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -62$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο ο γενικός τύπος είναι $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$.

$$\text{Τότε: } \begin{cases} \alpha_3 = -8 \\ \alpha_6 = -64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^2 = -8 \quad (1) \\ \alpha_1 \cdot \lambda^5 = -64 \quad (2) \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τη (2) με την (1) προκύπτει: $\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^5}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} = \frac{-64}{-8} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Άρα $\lambda = 2$ και αντικαθιστώντας όπου $\lambda = 2$ στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$\alpha_1 \cdot 2^2 = -8 \Leftrightarrow 4\alpha_1 = -8 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2.$$

β) Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι

$$S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}.$$

$$\text{Άρα: } S_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (-2) \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = (-2) \cdot 31 = -62.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x+2|=7$ επαληθεύεται για $x=1$, $x=2$ και $x=-3$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x+2|=7$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι:

$$|1+2|=|3|=3 \neq 7 \text{ άρα για } x=1 \text{ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.}$$

$$|2+2|=|4|=4 \neq 7 \text{ άρα για } x=2 \text{ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.}$$

$$|-3+2|=|-1|=1 \neq 7 \text{ άρα για } x=-3 \text{ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.}$$

β) Για να λύσουμε την εξίσωση, έχουμε ισοδύναμα:

$$|x+2|=7, \text{ οπότε}$$

$$x+2=7 \text{ ή } x+2=-7, \text{ δηλαδή}$$

$$x=7-2 \text{ ή } x=-7-2 \text{ και τελικά}$$

$$x=5 \text{ ή } x=-9.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς: 8 , -4 και -8 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 = 16$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 16$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι:

$8^2 = 64 \neq 16$, άρα ο αριθμός 8 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

$(-4)^2 = 16$, άρα ο αριθμός -4 είναι λύση της εξίσωσης.

$(-8)^2 = 64 \neq 16$, άρα ο αριθμός -8 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

β) Για να λύσουμε την εξίσωση, έχουμε ισοδύναμα:

$$x^2 = 16, \text{ οπότε}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}, \text{ δηλαδή}$$

$$|x| = 4 \text{ και τελικά}$$

$$x = 4 \text{ ή } x = -4.$$

ΘΕΜΑ 4

Για τον πραγματικό αριθμό α , δίνεται ότι $\alpha < -2$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\alpha + 4 < 0$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την παράσταση $A = |2\alpha + 4| + 3|3\alpha + 6|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $A > -11$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\alpha < -2$, δηλαδή
 $2\alpha < -2 \cdot 2$, οπότε
 $2\alpha < -4$, συνεπώς
 $2\alpha + 4 < -4 + 4$ και τελικά
 $2\alpha + 4 < 0$.

β) Έχουμε:

$$A = |2\alpha + 4| + 3|3\alpha + 6| = |2\alpha + 4| + 3|3(\alpha + 2)| = \\ |2\alpha + 4| + 9|\alpha + 2| \stackrel{(\alpha)}{\alpha < -2} = -2\alpha - 4 - 9(\alpha + 2) = -11\alpha - 22.$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε $A = -11\alpha - 22$, οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned} A > -11 &\Leftrightarrow \\ -11\alpha - 22 > -11 &\Leftrightarrow \\ -11\alpha > 11 &\Leftrightarrow \\ \alpha < -1 &\quad (1) \end{aligned}$$

Όμως από τα δεδομένα ισχύει: $\alpha < -2$ (2)

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $\alpha < -2$, αφού οι (1) και (2) συναληθεύουν για $\alpha < -2$.

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να υπολογίσετε τη δύναμη $2^{\frac{6}{3}}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $(\sqrt{2})^6 = 8$.

(Μονάδες 3)

iii. Να υπολογίσετε τη δύναμη $(\sqrt[3]{2})^6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2})^6$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε: $2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$.

ii. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων έχουμε: $(\sqrt{2})^6 = \left[(2)^{\frac{1}{2}} \right]^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$.

iii. Ομοίως έχουμε: $(\sqrt[3]{2})^6 = \left[(2)^{\frac{1}{3}} \right]^6 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$.

β) Έχουμε: $A = (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2})^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot (\sqrt[3]{2})^6 \stackrel{\text{ii.}}{=} 8 \cdot 4 \stackrel{\text{iii.}}{=} 32$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν οι πραγματικοί αριθμοί $-3, 9, -27$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι πραγματικοί αριθμοί $9, x, 81$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πράγματι οι αριθμοί $-3, 9, -27$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $9^2 = (-3) \cdot (-27)$.

β) Αφού οι αριθμοί $9, x, 81$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα ισχύει:

$x^2 = 9 \cdot 81$ δηλαδή $x^2 = 729$ επομένως $\sqrt{x^2} = 27$ οπότε $|x| = 27$ άρα $x = \pm 27$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 + 6x + 9$ και $B = (4y - 2)^2$, με $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (x + 3)^2$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση $A = x^2 + 6x + 9$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x έχει την μορφή της ταυτότητας του αναπτύγματος τετραγώνου $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$.

Επομένως, για οποιοδήποτε πραγματικό x η παράσταση γίνεται

$$A = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

β) i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:

$$A+B=(x+3)^2+(4y-2)^2 \geq 0 \text{ ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.}$$

ii. Από το i ερώτημα ισχύει $A+B \geq 0$ με A, B μη αρνητικούς αριθμούς, για να ισχύει $A+B=0$ πρέπει $x+3=0$ και $4y-2=0$.

$$\text{Επομένως, } x=-3 \text{ και } 4y=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Η ισότητα $A+B=0$ ισχύει όταν $x=-3$ και $y=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = |x - 2|$

i. για $x = 0$.

(Μανάδες 5)

ii. για $x = -4$.

(Μανάδες 5)

iii. για $x = 5$.

(Μανάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

(Μανάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η τιμή της παράστασης $B = |x - 2|$

i. για $x = 0$ είναι $|0 - 2| = |-2| = 2$.

ii. για $x = -4$ είναι $|-4 - 2| = |-6| = 6$.

iii. για $x = 5$ είναι $|5 - 2| = |3| = 3$.

β) Η εξίσωση $|x - 2| = 3$ αληθεύει για τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x - 2 = 3$ ή

$x - 2 = -3$ δηλαδή ισοδύναμα όταν $x = 5$ ή $x = -1$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $2 < y < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $4 < 2y < 6$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις

i. $2y + 3$.

(Μονάδες 9)

ii. $2y - 5$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της ανισότητας $2 < y < 3$ με τον αριθμό 2, ο οποίος είναι θετικός και επομένως η φορά της ανισότητας παραμένει, έχουμε $2 \cdot 2 < 2 \cdot y < 2 \cdot 3$ δηλαδή $4 < 2y < 6$.

β) Ξεκινώντας από την ανισότητα $4 < 2y < 6$ που αποδείξαμε στο α) ερώτημα

i. προσθέτοντας σε όλους τους όρους της ανισότητας τον αριθμό 3 έχουμε $4 + 3 < 2y + 3 < 6 + 3$ δηλαδή $7 < 2y + 3 < 9$.

ii. προσθέτοντας σε όλους τους όρους της ανισότητας τον αριθμό -5 έχουμε $4 + (-5) < 2y + (-5) < 6 + (-5)$ δηλαδή $-1 < 2y - 5 < 1$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x \cdot (x^2 - 9) = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατάξετε τις ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x^2 - 9 = 0$ ισοδύναμα $x^2 = 9$ και τελικά $x = 3$ ή $x = -3$.

β) Είναι $2x \cdot (x^2 - 9) = 0$ ισοδύναμα $2x = 0$ ή $x^2 = 9$ και τελικά $x = 0$ ή $x = 3$ ή $x = -3$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι $-3, 0, 3$ και με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αφού $\frac{-3+3}{2} = 0$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο 12.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_5 = 16$.

i. Να βρείτε τον 4ο όρο α_4 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο $\frac{8+16}{2} = 12$.

β)

i. Ο 4ος όρος α_4 είναι ο αριθμητικός μέσος των $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_5 = 16$ που όπως δείξαμε στο α) ερώτημα είναι ο αριθμός 12, δηλαδή $\alpha_4 = 12$.

Η διαφορά $\omega = \alpha_4 - \alpha_3 = 12 - 8 = 4$.

ii. Από το γενικό τύπο της προόδου $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$ για $n=3$ έχουμε $\alpha_3 = \alpha_1 + (3-1) \cdot \omega$ οπότε με αντικατάσταση έχουμε $8 = \alpha_1 + 2 \cdot 4$ δηλαδή $8 = \alpha_1 + 8$ και άρα $\alpha_1 = 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $A = 4x$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{4}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$A = (x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x .$$

β) Είναι:

$$A > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > \frac{1}{16}$$

Επομένως, η παράσταση A είναι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{4}$, μόνο όταν ισχύει: $x > \frac{1}{16}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2(x-1) < x+4 \text{ και } 2-(5-x) > 0$$

α) Να τις λύσετε.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις και των δυο ανισώσεων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2(x-1) < x+4 \Leftrightarrow 2x-2 < x+4 \Leftrightarrow 2x-x < 4+2 \Leftrightarrow x < 6$$

και

$$2-(5-x) > 0 \Leftrightarrow 2-5+x > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

β) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων, είναι εκείνοι που είναι μεγαλύτεροι από το 3 και μικρότεροι από το 6, δηλαδή είναι οι αριθμοί 4 και 5.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + \alpha}{x + 3}$, $x \neq -3$ και α ένας πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική της

παράσταση διέρχεται από την αρχή $O(0, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 5)

Για τη συνέχεια θεωρήσετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή O , ισχύει $f(0)=0$,

οπότε $\frac{0+\alpha}{0-3}=0$, δηλαδή $\frac{\alpha}{-3}=0$, άρα $\alpha=0$.

β) Με $\alpha=0$, έχουμε: $f(x)=\frac{2x}{x-3}$, $x \neq 3$, οπότε

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3}=1 \Leftrightarrow 2x=x-3 \Leftrightarrow x=-3$$

γ) Είναι:

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3}=x \Leftrightarrow 2x=x(x-3) \Leftrightarrow 2x=x^2-3x \Leftrightarrow x^2-5x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=5$$

Αν $x=0$, τότε $y=0$, ενώ αν $x=5$, τότε $y=5$, οπότε τα κοινά σημεία είναι τα $O(0, 0)$ και $A(5, 5)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x - 5 = 10$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 5| = 10$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$x - 5 = 10 \Leftrightarrow x = 10 + 5 \Leftrightarrow x = 15.$$

β) Για κάθε αριθμό $\theta > 0$ ισχύει η ιδιότητα: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm \theta$.

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$|x - 5| = 10 \Leftrightarrow x - 5 = \pm 10 \Leftrightarrow$$

$$x = 5 + 10 \text{ ή } x = 5 - 10 \Leftrightarrow$$

$$x = 15 \text{ ή } x = -5$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.

(Μονάδες 7)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού x , για την οποία $f(x) = -1$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = 2 \text{ ή } 1$.

Το τριώνυμο γράφεται ως γινόμενο παραγόντων, όταν $\Delta > 0$, στη μορφή:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ όπου } x_1, x_2, \text{ οι ρίζες του τριωνύμου,}$$

$$\text{Οπότε έχουμε } x^2 - 3x + 2 = 1 \cdot (x - 2)(x - 1) = (x - 2)(x - 1).$$

β) i) Η συνάρτηση ορίζεται όταν ο παρονομαστής του κλάσματος δεν είναι μηδέν, οπότε για το πεδίο ορισμού της πρέπει να ισχύει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της είναι $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{ii) Ισχύει ότι } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2, \text{ με } x \neq 1.$$

iii) Αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους μπορεί να ισχύει:

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Όμως η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x = 1$. Η τιμή αυτή απορρίπτεται.

Δηλαδή, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης για την οποία να ισχύει $f(x) = -1$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 3x - 2y - 2$ και $\beta = y - 1 - 2x$ και η παράσταση $A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6}$.

α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

β) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε:

i. Να δείξετε ότι $x - y = 3$.

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = 1$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η παράσταση A πρέπει $3x + 6 \neq 0$ δηλαδή $x \neq -2$.

β)

i. Αφού οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι πρέπει να ισχύει:

$$\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 2 + y - 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow x - y = 3.$$

ii. Είναι:

$$A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6} = \frac{x(x + 2) - y(x + 2)}{3(x + 2)} =$$
$$\frac{(x + 2)(x - y)}{3(x + 2)} = \frac{x - y}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{3x-1}{5}$ και $B = \frac{1-2x}{3}$

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B είναι αντίθετες.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $A = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

β) Για να είναι οι παραστάσεις αντίθετες θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} A + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x-1}{5} + \frac{1-2x}{3} = 0 \Leftrightarrow 3(3x-1) + 5(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &9x - 3 + 5 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει δυο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

α)

i. Να γράψετε το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

ii. Να γράψετε το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε $S = x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$. Άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 3.

ii. Έχουμε $P = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Άρα το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

β) Μια εξίσωση που έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$ είναι η $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = 3$ είναι το άθροισμα των ριζών της και $P = 2$ το γινόμενό τους, όπως γράψαμε στο α) ερώτημα. Άρα μια εξίσωση είναι η $x^2 - 3x + 2 = 0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 3$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 21.

(Μονάδες 9)

ii. Να παραστήσετε γραφικά την f .

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες έχουμε:

Για τον $y'y$ άξονα είναι $x=0$ και $f(0)=4\cdot 0-3=-3$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0,-3)$.

Για τον $x'x$ άξονα είναι $y=0$ και $y=f(x)=0$ που γίνεται $0=4x-3$, οπότε

$$4x=3 \text{ και τελικά}$$

$$x=\frac{3}{4}. \text{ Άρα το σημείο τομής με τον } x'x \text{ άξονα είναι το } \left(\frac{3}{4}, 0\right).$$

ii. Παρατηρούμε ότι $f(1)=4\cdot 1-3=4-3=1$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.

β)

i. Η τετμημένη του ζητούμενου σημείου είναι η λύση της εξίσωσης

$$f(x)=21 \Leftrightarrow$$

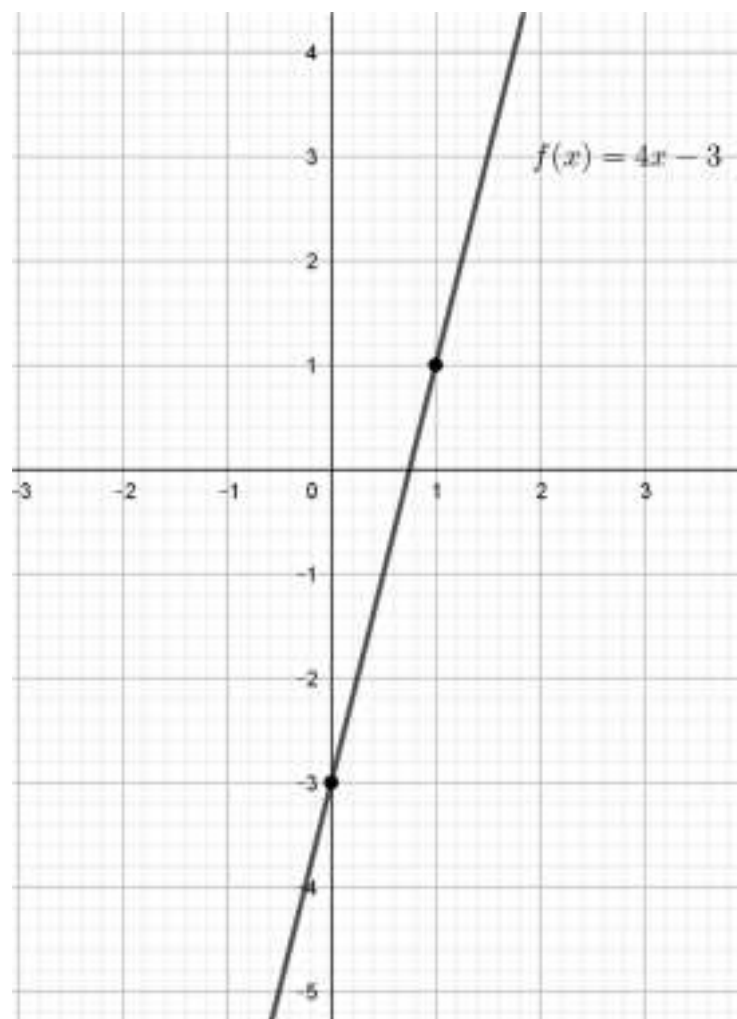
$$4x-3=21 \Leftrightarrow$$

$$4x=24 \Leftrightarrow$$

$$x=6.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(6,21)$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία. Για να χαράξουμε την ευθεία αυτή χρειαζόμαστε δυο σημεία. Δυο από τα σημεία που βρήκαμε στα παραπάνω ερωτήματα είναι τα $(0,-3)$ και $(1,1)$. Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία του παρακάτω σχήματος:



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A σε κάθε μια από τις τρεις επόμενες περιπτώσεις:

i) $x = 4$

(Μονάδες 4)

ii) $x = 3$

(Μονάδες 4)

iii) $x = 2$.

(Μονάδες 4)

β) Αν $x < 3$ να γράψετε την τιμή της παράστασης A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i) Για $x = 4$ έχουμε $A = |4 - 3| = |1| = 1$.

ii) Για $x = 3$ έχουμε $A = |3 - 3| = |0| = 0$.

iii) Για $x = 2$ έχουμε $A = |2 - 3| = |-1| = 1$.

β) Αν $x < 3$ τότε $x - 3 < 0$ επομένως $A = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 2| < 1$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $|x - 2| < 1$ να δείξετε ότι $3 < 2x + 1 < 7$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $1 < x < 3$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |x - 1| + |x - 3|$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $|x - 2| < 1$. Επομένως $-1 < x - 2 < 1$. Δηλαδή $-1 + 2 < x < 1 + 2$.

Συνεπώς $1 < x < 3$.

β) Αφού $|x - 2| < 1$ έχουμε $1 < x < 3$. Επομένως $2 < 2x < 6$. Συνεπώς $3 < 2x + 1 < 7$.

γ) Αφού $1 < x < 3$ έχουμε $0 < x - 1$ και $x - 3 < 0$.

Επομένως $A = |x - 1| + |x - 3| = (x - 1) + (-x + 3) = x - 1 - x + 3 = 4$.

ΘΕΜΑ 4

α) Αν $x^2 - 7x + 10 < 0$, να αποδείξετε ότι $2 < x < 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 2 < x + 4$.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ 4

α) Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \\ \text{και} \\ x_2 = \frac{7+3}{2} = 5 \end{cases}$$

Ο συντελεστής του x^2 του τριωνύμου $x^2 - 7x + 10$ είναι $1 > 0$, οπότε ο πίνακας προσήμου είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 10$	+	0	-	0	+

Άρα, $x^2 - 7x + 10 < 0$ για $2 < x < 5$.

β) Έχουμε:

$$3x - 2 < x + 4, \text{ άρα}$$

$$3x - x < 4 + 2, \text{ οπότε}$$

$$2x < 6, \text{ δηλαδή}$$

$$x < 3.$$

γ) Οι λύσεις των ερωτημάτων α) και β) παριστάνονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών με το ακόλουθο διάγραμμα:



Από το οποίο προκύπτει ότι το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το διάστημα $(2,3)$.

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha - \gamma < 0$.

(Μονάδες 12)

β) $(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha < \gamma$. Άρα $\alpha - \gamma < 0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha < \beta$ προκύπτει ότι $\alpha - \beta < 0$. Επίσης, από το ερώτημα α) είναι και $\alpha - \gamma < 0$. Οπότε, σύμφωνα με τον κανόνα προσήμου γινομένου έχουμε

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και να αποδείξετε ότι για το γινόμενο $P = x_1 x_2$ ισχύει $P = 1$.

(Μονάδες 14)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 .

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

και

$$P = x_1 x_2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

β) Οι αριθμοί x_1, x_2 έχουν άθροισμα $S = 4$ και γινόμενο $P = 1$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο

$x^2 - Sx + P = 0$, η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 είναι η $x^2 - 4x + 1 = 0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \frac{4}{3}x - 4$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της A, B με τους άξονες και να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Με $x = 0$ έχουμε $y = -4$ οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -4)$.

Με $y = 0$ έχουμε

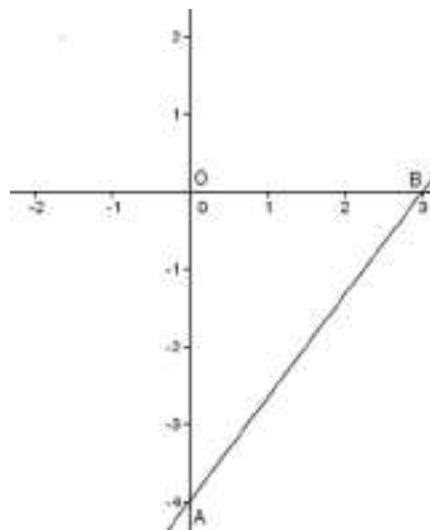
$$\frac{4}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$$

οπότε η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3, 0)$.

Η ευθεία που διέρχεται από τα A, B φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές OB, OA και ισχύει $OB = 3$ και $OA = 4$. Επομένως το εμβαδόν του E είναι:

$$E = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$



ΘΕΜΑ 4

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$

ii. $\alpha + \beta = 2$

(Μονάδες 8+6=14)

β) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$

(Μονάδες 11)

ΛΥΣΗ

α) i. Από την δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) = 0, \text{ οπότε } (\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta) \text{ που είναι το ζητούμενο.}$$

ii. Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί, οπότε $\alpha + \beta \neq 0$.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της ισότητας του προηγούμενου ερωτήματος με $\alpha + \beta$, παίρνουμε $\alpha + \beta = 2$.

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $\alpha + \beta = 2$ έχουμε:

$$2\alpha + \beta - 2 = \alpha + \alpha + \beta - 2 = \alpha + 2 - 2 = \alpha \text{ και } \alpha + 2\beta - 2 = \alpha + \beta + \beta - 2 = 2 + \beta - 2 = \beta$$

οπότε $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

β) Για να ανήκει ένα σημείο στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης.

Αφού βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(-2) = 3$ αυτό σημαίνει ότι το σημείο $M(-2,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

Επομένως: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

δ) Έχουμε: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 1) > 0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 1$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται παράσταση A .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A = -5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός είναι μη αρνητικός. Επομένως, η Α ορίζεται μόνο όταν $x - 4 \geq 0$ και $x + 1 \geq 0$.

Συνεπώς, $x \geq 4$ και $x \geq -1$. Άρα $x \in [4, +\infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι το γινόμενο που περιέχεται στην παράσταση, οδηγεί σε διαφορά τετραγώνων, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x - 4 - (x + 1) \\ &= x - 4 - x - 1 = -5. \end{aligned}$$

γ) Ξεκινάμε από το 1^ο μέρος της ισότητας που θέλουμε να δείξουμε και κάνουμε ομώνυμα:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}} &= \frac{5(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) - 5(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})} = \\ &= \frac{5(\sqrt{x-4}) - 5(\sqrt{x+1}) - 5(\sqrt{x-4}) - 5(\sqrt{x+1})}{-5} = \frac{-10\sqrt{x+1}}{-5} = 2\sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 12 < 0$ (1).

(Μονάδες 10)

γ) Ποια από τα στοιχεία του συνόλου Ω ανήκουν στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1);

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6.

Άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β)) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 + 48 = 49 > 0$$

με ρίζες : $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-7}{2} = -3 \\ \text{και} \\ x_2 = \frac{1+7}{2} = 4 \end{cases}.$

Ο πίνακας προσήμου είναι ο ακόλουθος με $a=1>0$:

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12$	+	0	-	0	+

Άρα, $x^2 - x - 12 < 0$ για $-3 < x < 4$.

γ) Από το β ερώτημα έχουμε $x \in (-3,4)$ επίσης $x \in \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, άρα τα κοινά σημεία των δύο συνόλων είναι οι θετικές ακέραιες τιμές του x.

Άρα τα ζητούμενα στοιχεία είναι το σύνολο $\{1,2,3\}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\omega = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 6$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow 8 = \alpha_1 + 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$.

β) Είναι $\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega = 6 + 6 \cdot 2 = 6 + 12 = 18$.

γ) Είναι $S_7 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_7) \cdot 7}{2} = \frac{(6 + 18) \cdot 7}{2} = 84$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε της εξίσωση $x^2 - 2x + 7 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 2x + 7$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλασίου του.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 - 2x + 7 = 0$ είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2x + 7 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 2x + 7$ έχει $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$ οπότε είναι, για κάθε πραγματική τιμή του x , ομόσημο του $a = 1 > 0$, δηλαδή θετικό. Συνεπώς $x^2 - 2x + 7 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δείξαμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x^2 - 2x + 7 > 0$ ή ισοδύναμα $x^2 + 7 > 2x$, που σημαίνει ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλασίου του.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 επαληθεύει την εξίσωση (1).

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστώντας στην (1) όπου x τον αριθμό 1, έχουμε:

$$1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$$

άρα πράγματι επαληθεύει την εξίσωση.

β) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού.

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$.

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

δηλαδή η $x=6$ και η $x=1$.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε πραγματικούς τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι ανισότητες $0 < x < 2$ και $0 < y < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x + y < 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων πραγματικών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $-3y$

(Μονάδες 7)

ii) $x - 2y$

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Εφόσον ισχύουν $0 < x < 2$ και $0 < y < 3$, μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη και να έχουμε: $0 + 0 < x + y < 2 + 3$, δηλαδή $0 < x + y < 5$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) i) Ισχύει ότι $0 < y < 3$. Πολλαπλασιάζοντας με -3 , αλλάζει η φορά της ανισότητας και έχουμε: $0 > -3y > -9 \Leftrightarrow -9 < -3y < 0$.

Προσθέτοντάς την κατά μέλη με την $0 < x + y < 5$ έχουμε:

$$-9 + 0 < x + y - 3y < 5 + 0 \Rightarrow -9 < x - 2y < 5.$$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x| \geq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $3(|x|+2)+1 < 22$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β).

(Μονάδες 8)

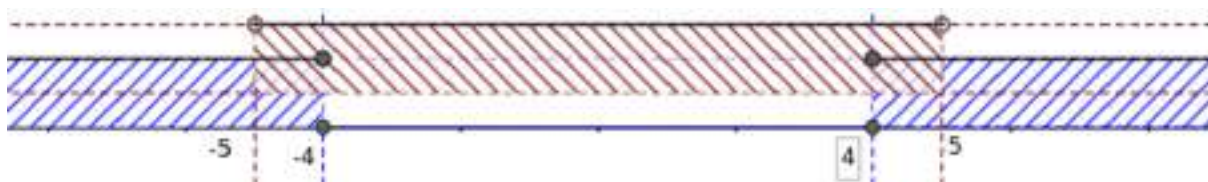
ΘΕΜΑ 4

α) Από την ιδιότητα $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ή $x \geq a$, για a θετικό αριθμό, η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα: $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -4$ ή $x \geq 4$.

β) Η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$3(|x|+2)+1 < 22 \Leftrightarrow 3(|x|+2) < 21 \Leftrightarrow |x|+2 < 7 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5.$$

γ) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων προκύπτουν από την αριθμογραμμή παρακάτω:



και είναι: $x \in (-5, -4) \cup (4, 5)$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3x - 3 = 0$.

(Μονάδες 6)

ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση $(3x - 3)(x - 2)^2 = 0$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) i) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

ii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

β) Η εξίσωση γράφεται:

$$(3x - 3)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \text{ ή } (x - 2)^2 = 0$$

η οποία από το ερώτημα α) δίνει λύσεις

$$x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $3x - 7 \geq 5x + 11$ (I).

α) Να λύσετε την ανίσωση (I).

(Μονάδες 15)

β) Να γράψετε τις λύσεις της (I) με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $3x - 5x \geq 7 + 11 \Leftrightarrow -2x \geq 18 \Leftrightarrow$

$$2x \leq -18 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{-18}{2} \Leftrightarrow x \leq -9$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-\infty, -9]$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\frac{8}{x}$ και $32x$ είναι ο αριθμός 16, όπου x τυχαίος πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν.

(Μονάδες 9)

β) Οι αριθμοί $\frac{8}{x}$, 16, $32x$, με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) , με λόγο $\lambda = 4$.

(i) Να αποδείξετε ότι $x = 2$.

(Μονάδες 8)

(ii) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος αυτής της προόδου είναι $a_n = 2^{2n}$, όπου n θετικός ακέραιος.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο ζητούμενος γεωμετρικός μέσος είναι ο αριθμός $\sqrt{\frac{8}{x} \cdot 32x} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$.

β) Οι αριθμοί $\frac{8}{x}$, 16, $32x$, με αυτή τη σειρά, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) , με λόγο $\lambda = 4$.

(i) Έχουμε $\frac{32x}{16} = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

(ii) Είναι $\alpha_1 = \frac{8}{x} = \frac{8}{2} = 4$, $\lambda = 4$ και $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^{1+n-1} = 4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x στο πεδίο ορισμού της f ώστε το σημείο $M(x, 2)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού της f για τις οποίες $f(x) = x + 1$.

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί : $x \geq 0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = [0, +\infty)$.

β) Για να ανήκει το σημείο $M(x, 2)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , θα πρέπει να ισχύει:

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$, τιμή δεκτή αφού ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

γ) Λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$.

Αφού $x \geq 0$, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της ισότητας έχουμε:

$x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (1 - x) = 0$. Άρα: $x = 0$ ή $x = 1$, δεκτές τιμές αφού ανήκουν στο διάστημα $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 18$ και $\alpha_4 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει $\omega = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους δυο πρώτους όρους της.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{37} = 290$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $a_4 = 26$ έχουμε $a_3 + \omega = 26$, οπότε $18 + \omega = 26$.

Άρα, $\omega = 8$.

β) Ο δεύτερος όρος της προόδου είναι

$$a_2 = a_3 - \omega = 18 - 8 = 10$$

και ο πρώτος $a_1 = a_2 - \omega = 10 - 8 = 2$.

γ) Με τη βοήθεια του τύπου $a_n = a_1 + (n-1)\omega$ έχουμε:

$$a_{37} = a_1 + 36\omega = 2 + 36 \cdot 8 = 2 + 288 = 290$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha + \gamma = 10 \text{ και } (\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma.$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = 100$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή,

$$A = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right) = \alpha\gamma\frac{\gamma + \alpha}{\alpha\gamma} = \alpha + \gamma \text{ και } \alpha + \gamma = 10$$

η τιμή της παράστασης A είναι ίση με 10.

β) Από την ισότητα $(\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma$ παίρνουμε: $\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$, οπότε $\alpha(\beta - \alpha) + \gamma(\beta - \alpha) = 0$ απ' όπου έπεται ότι $(\beta - \alpha)(\alpha + \gamma) = 0$ και δεδομένου ότι $\alpha + \gamma = 10 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\beta - \alpha = 0$, δηλαδή $\alpha = \beta$.

γ) Με $\beta = \alpha$ έχουμε:

$$(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = (2\alpha - \alpha + \gamma)(2\alpha - \alpha + \gamma) = (\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma) = 10 \cdot 10 = 100$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή της όταν $x = 2$ και όταν $x = -3$.

(Μονάδες 10)

β) Έστω $x > 2$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(x - 1)$

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 2)(x - 1)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Με $x=2$ έχουμε $f(2)=|2-2|+2=2$, ενώ με $x=-3$ έχουμε

$$f(-3)=|-3-2|-3=|-5|-3=5-3=2.$$

β) i. Με $x>2$ έχουμε $x-2>0$, οπότε $|x-2|=x-2$ και ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

$$f(x)=x-2+x=2x-2=2(x-1)$$

που είναι το ζητούμενο.

ii. Επειδή με $x>2$ έχουμε $f(x)=2(x-1)$. Έτσι, είναι:

$$f(x)=(x-2)(x-1) \Leftrightarrow 2(x-1)=(x-2)(x-1) \Leftrightarrow 2(x-1)-(x-2)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2-x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(4-x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=4$$

Η λύση $x=1$ απορρίπτεται αφού ισχύει $x>2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=4$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 2x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $\varepsilon: y = -1$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\Gamma(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των σημείων A, Γ και B είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \\x(x - 2) &= 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \text{ ή } x = 2\}.\end{aligned}$$

Άρα, τα σημεία τομής είναι τα $A(0,0)$ και $B(2,0)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -1$, λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow \\x^2 - 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $\Gamma(1, -1)$.

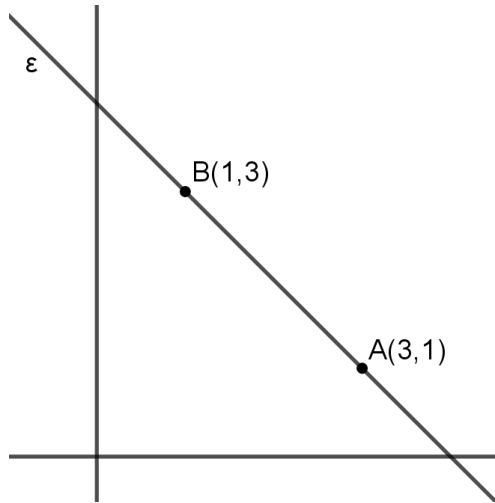
γ) Οι τετμημένες των σημείων Α, Γ και Β είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2 αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$$1 - 0 = 2 - 1 = 1.$$

Άρα, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$ και $B(1,3)$



α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η κλίση της ευθείας είναι

$$\alpha = \frac{3 - 1}{1 - 3} = \frac{2}{-2} = -1.$$

β) Αφού η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -1$, η εξίσωσή της έχει τη μορφή:

$$y = -x + \beta.$$

Το σημείο $A(3,1)$ ανήκει στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα:

$$1 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -x + 4$.

ΘΕΜΑ 2

Για τους αριθμούς $2\alpha + 1$ και $\beta + 1$, ισχύει ότι $(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$, να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0$,

(Μονάδες 11)

β) οι αριθμοί $x = \alpha(2 + \beta)$ και $y = \beta(\alpha + 1)$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 14)

Λύση

α) Ισοδύναμα έχουμε:

$$(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha(\beta + 1) + 1 \cdot (\beta + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta + 2\alpha + \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta + 2\alpha + \beta = 0.$$

β) Δύο αριθμοί είναι αντίθετοι αν και μόνο αν έχουν άθροισμα μηδέν. Έχουμε ότι:

$$x + y = \alpha(2 + \beta) + \beta(\alpha + 1) = 2\alpha + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta = 2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0,$$

όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα α).

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 13)

α) Είναι:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \\&\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2.\end{aligned}$$

β) Έχουμε ότι $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$, δηλαδή ισοδύναμα έχουμε ότι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 0$,
η οποία από το ερώτημα α) γίνεται $(\alpha - \beta)^2 = 0$ οπότε, $\alpha - \beta = 0$ άρα, $\alpha = \beta$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν οι λύσεις του ερωτήματος α) είναι $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 3$, να εξετάσετε για ποια από αυτές τις τιμές του ω , η εξίσωση $(\omega^2 - 4\omega + 3)x = \omega - 1$, είναι αδύνατη.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \text{ και } \omega_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

β) Για $\omega = 1$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 0$ που είναι ταυτότητα. Για $\omega = 3$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 2$ που είναι αδύνατη. Άρα για $\omega = 3$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με γενικό όρο $a_n = 4n - 2$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

β) Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 4$, να βρείτε τον πρώτο όρο της (a_n) που είναι μεγαλύτερος του 120.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα S_{30} των 30 πρώτων όρων της προόδου (a_n) .

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Για να είναι η ακολουθία (a_n) αριθμητική πρόοδος, πρέπει η διαφορά δύο οποιονδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή. Έχουμε ότι:

$$a_{n+1} - a_n = [4(n+1) - 2] - (4n - 2) = 4n + 4 - 2 - 4n + 2 = 4.$$

Άρα η διαφορά δύο οποιονδήποτε διαδοχικών είναι σταθερή και ίση με 4, οπότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι ο $a_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$.

β) Έστω a_n ο πρώτος όρος της προόδου που είναι μεγαλύτερος του 120. Τότε

$$a_n > 120 \Leftrightarrow$$

$$4n - 2 > 120 \Leftrightarrow$$

$$4n > 122 \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{122}{4} = 30,5.$$

Άρα, επειδή $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $n = 31$. Ο ζητούμενος όρος είναι ο $a_{31} = 122$.

γ) Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2 \cdot 2 + (30 - 1) \cdot 4] = 15 \cdot 120 = 1800.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται το κλάσμα στον τύπο της συνάρτησης θα πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

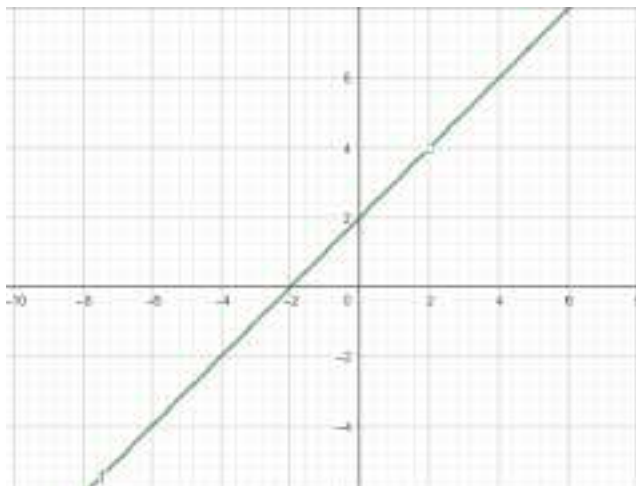
Άρα $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) i. Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$.

ii. Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f παίρνουμε πίνακα τιμών με $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

x	y
0	2
2	0

Τοποθετούμε τα σημεία $(0,2)$ και $(-2,0)$ στους άξονες x' και y' . Προκύπτει το παρακάτω σχήμα, η ευθεία $y=x+2$ αποτελεί την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης. Από την ευθεία εξαιρείται το σημείο $(2,4)$ λόγω του περιορισμού.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(1)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για $x=-2$ έχουμε $f(-2) = (-2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$.

Για $x=1$ έχουμε $f(1) = 1^2 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Επειδή $8 > 5$, επομένως $f(-2) > f(1)$.

β) Η εξίσωση $f(x) = f(1)$ γίνεται $x^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι -1 ή 1 .

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους αριθμούς $-12, -6, 0, \dots$ που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

α) i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής.

(Μονάδες 10)

β) Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της (προόδου αυτής) είναι ίσο με 0.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) i) Για να είναι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει η διαφορά οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Αφού κάθε φορά προσθέτουμε το 6, η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων είναι σταθερή και ίση με 6.

Οπότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=6$.

ii) Ο επόμενος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου θα προκύψει αν προσθέσουμε στον όρο 0 το 6. Για να βρούμε τον αμέσως επόμενο θα πρέπει να προσθέσουμε στον 6 το 6.

Συνεπώς οι ζητούμενοι όροι είναι ο 6 και ο 12.

β) Οι πέντε πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι -12,-6,0,6,12

τότε $-12 + (-6) + 0 + 6 + 12 = 0$.

Άρα το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου αυτής είναι ίσο με 0.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι αριθμοί 1 και 2 και να βρείτε το πρόσημό του.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ οπότε έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ έχουν άθροισμα $-\frac{-3}{1} = 3$ και γινόμενο $\frac{2}{1} = 2$ οπότε είναι πράγματι οι αριθμοί 1 και 2. Εναλλακτικά βρίσκουμε με αντικατάσταση ότι οι αριθμοί 1 και 2 μηδενίζουν το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	○	○	+
		-	-	

γ) Από τον παραπάνω πίνακα που δίνει το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ συμπεραίνουμε ότι $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ για $1 \leq x \leq 2$ δηλαδή για $x \in [1, 2]$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 1ος όρος είναι $\alpha_1 = 3$, ενώ ο 10ος όρος είναι $\alpha_{10} = 21$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

Για $\omega = 2$

β) Να βρείτε το άθροισμα S_{10} των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (α_n) .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_n) πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να ισούται με 168. (Δίνεται $\sqrt{676} = 26$.)

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Από το γενικό τύπο της προόδου $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1) \cdot \omega$ για $n=10$ έχουμε $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1) \cdot \omega$ οπότε με αντικατάσταση έχουμε $21 = 3 + 9 \cdot \omega$ δηλαδή $18 = 9 \cdot \omega$ και άρα $\omega = 2$.

β) Από το τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

(α_n) έχουμε $S_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n) \cdot n}{2}$ οπότε για $n=10$ έχουμε

$$S_{10} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(3 + 21) \cdot 10}{2} = 120.$$

γ) Έστω n ο φυσικός αριθμός που ισούται με το πλήθος των ζητούμενων πρώτων

όρων. Τότε θα πρέπει $S_n = \frac{(2\alpha_1 + (n-1) \cdot \omega) \cdot n}{2} = 168$ δηλαδή ισοδύναμα

$$\frac{(2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = 168 \text{ οπότε } \frac{2 \cdot (3 + n - 1) \cdot n}{2} = 168 \text{ δηλαδή } (2 + n) \cdot n = 168 \text{ και}$$

τελικά $n^2 + 2n - 168 = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 676$ και ρίζες τους αριθμούς 12 και -14. Επειδή όμως ο αριθμός n είναι φυσικός, δεν μπορεί να ισούται με -14 και άρα $n = 12$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $4(x - 2) > 5(2x + 8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 9x < 0$.

(Μονάδες 12)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις (αν υπάρχουν).

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε $4x - 8 > 10x + 40$, άρα $4x - 10x > 8 + 40$.

Έτσι, $-6x > 48$. Τελικά $\frac{-6x}{-6} < \frac{48}{-6}$. Όστε $x < -8$.

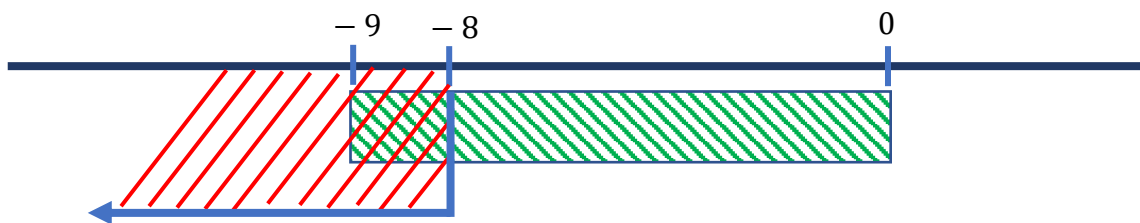
β) Παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2 + 9x$ έχει ρίζες τους αριθμούς -9 και 0 (μηδέν) και αυτό διότι $x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x + 9) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x + 9 = 0$. Όστε $x = 0$ ή $x = -9$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου.

x	$-\infty$	-9	0
$x^2 + 9x$	$+$	$-$	$+$

Έτσι, οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί x , για τους οποίους ισχύει $-9 < x < 0$.

γ) Με βάση το παρακάτω σχεδιάγραμμα, οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $-9 < x < -8$.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 5| + 4, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(3)$ και $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

(Μονάδες 9)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $x \geq \frac{5}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{5} + x = f(x)$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(1) = |2 \cdot 1 - 5| + 4 = |-3| + 4 = 3 + 4 = 7, \quad f(3) = |2 \cdot 3 - 5| + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$\text{και } f\left(\frac{5}{2}\right) = \left|2 \cdot \frac{5}{2} - 5\right| + 4 = |0| + 4 = 4.$$

β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ γράφεται $|2x - 5| + 4 = 0$ και είναι ισοδύναμη με την

$|2x - 5| = -4$. Η τελευταία εξίσωση όμως είναι αδύνατη, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή να είναι αρνητική.

γ) i. Με $x \geq \frac{5}{2}$ έχουμε: $2x - 5 \geq 0$ οπότε $|2x - 5| = 2x - 5$. Άρα, $f(x) = 2x - 5 + 4 = 2x - 1$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με $x \geq \frac{5}{2}$ είναι:

$$\frac{x^2}{5} + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + x = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$$

έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 5 = 25 - 20 = 5 > 0$, οπότε βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης που είναι οι αριθμοί $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Η λύση $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ απορρίπτεται, αφού $x \geq \frac{5}{2}$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία ε : $y=ax+5$. Αν η ευθεία δ : $y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε .

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$;

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε : $y=-3x+5$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Ισχύει αν $\varepsilon // \delta$ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση.

Η κλίση της ευθείας δ είναι -3 . Άρα $\alpha = -3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3 .

ii. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha = -3 < 0$.

β) i. Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -3x + 5$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y=0$.

Για $y=0$ έχουμε: $-3x+5=0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

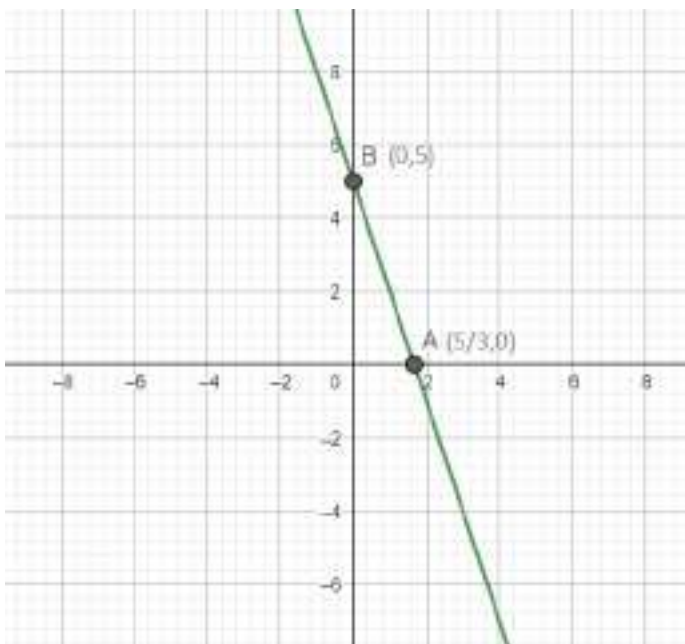
Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(\frac{5}{3}, 0)$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $x=0$.

Για $x=0$ έχουμε: $y=5$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $B(0, 5)$.

ii. . Για να σχεδιάσουμε την ευθεία, ενώνουμε τα σημεία που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, δηλαδή A και B τα οποία βρίσκονται πάνω στους άξονες.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με πρώτους όρους τους 1, 3, 9,...

α) Να βρείτε τον τέταρτο όρο α_4 της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της (α_n) είναι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 121.$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της προόδου , μετά τον πρώτο όρο, προκύπτει από τον προηγούμενο επι 3.

Από αυτό προκύπτει ότι η γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει λόγο $\lambda = 3$.

Επομένως ο α_4 προκύπτει αν τον α_3 πολλαπλασιάσουμε με το 3.

$$\text{Άρα } \alpha_4 = 3 \cdot 9 = 27.$$

β) Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα, χρειαζόμαστε και τον πέμπτο όρο.

$$\alpha_5 = 27 \cdot \lambda = 27 \cdot 3 = 81.$$

$$\text{Συνεπώς, } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ και $\beta = 2 + \sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha\beta = -\sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha + \beta = 1 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 1 + 2 = 3 \quad \text{και}$$

$$\alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}^2 = 2 - 2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Επειδή $\alpha - 1 = -\sqrt{2}$ και $\beta - 2 = \sqrt{2}$, έχουμε:

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και να το παραγοντοποιήσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης και να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ο

παραπάνω τύπος της συνάρτησης γράφεται $f(x) = \frac{x}{x-3}$

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει $\alpha=1, \beta=-5, \gamma=6$ και διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-4\cdot 6=25-24=1$ οπότε έχει δυο πραγματικές ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με βάση τον τύπο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$ δίνει:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

β) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Άρα, σύμφωνα με το ερώτημα (α) το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Με $x \in A$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x}{x-3}$$

γ) Με $x \neq 2$ και $x \neq 3$ έχουμε:

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} = 4 \Leftrightarrow x = 4x - 12 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$$

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση τον αριθμό 4.

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha\beta = 1$.

i. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) i. Οι αριθμοί α, β έχουν άθροισμα $S = \alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και γινόμενο $P = \alpha\beta = 1$, οπότε η εξίσωση

με ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η $x^2 - Sx + P = 0$ δηλαδή η $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$.

ii. Η εξίσωση $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ γράφεται $2x^2 - 5x + 2 = 0$ και έχει διακρίνουσα

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε βρίσκουμε ότι οι ρίζες της είναι οι αριθμοί 2 και $\frac{1}{2}$.

Άρα $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 2$

β) Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύουν $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = \frac{5}{2}$.

Τότε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$ που γράφεται $2x^2 - 2x + 5 = 0$. Αυτό όμως αποκλείεται, αφού η τελευταία

εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$.

Επομένως, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta = 1$ και

$\alpha\beta = \frac{5}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = -4$ και $\omega = 7$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 2^{ος} όρος της προόδου είναι $a_2 = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τον 5^ο όρο a_5 της προόδου.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Ισχύει ότι ο δεύτερος όρος της αριθμητικής προόδου θα είναι $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega = -4 + 7 = 3$.

β) Ο n -οστός όρος της αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.

Οπότε, ισχύει ότι $\alpha_n = -4 + (n-1)7 = 7n - 7 - 4 = 7n - 11$.

Συνεπώς, ο ζητούμενος 5^{ος} όρος θα είναι $\alpha_5 = 7 \cdot 5 - 11 = 24$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $K = |x-2|+1$.

α) Να γράψετε την παράσταση K χωρίς απόλυτη τιμή.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης K για τους αριθμούς x του ερωτήματος β.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x , ώστε $K=0,99$.

(Μονάδες 6)

Λύση

α.

Για $x \geq 2$ η παράσταση γίνεται $K = x - 2 + 1 = x - 1$.

Για $x < 2$ η παράσταση γίνεται $K = -x + 2 + 1 = -x + 3$.

β. Οι πραγματικοί αριθμοί x , οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4, είναι εκείνοι που ικανοποιούν τη σχέση $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \text{ ή } x - 2 = -4 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -2$.

γ. 1^{ος} τρόπος: Οι αριθμοί του ερωτήματος β, ικανοποιούν τη σχέση $|x - 2| = 4$, οπότε η παράσταση K γίνεται:

$$K = |x - 2| + 1 = 4 + 1 = 5.$$

2^{ος} τρόπος: Από το ερώτημα β, βρήκαμε $x = 6$ ή $x = -2$.

Αντικαθιστώντας στις παραστάσεις που βρήκαμε στο ερώτημα α, έχουμε αντίστοιχα:

$$K = 6 - 1 = 5 \text{ ή } K = -(-2) + 3 = 5.$$

δ. Η παράσταση K είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1, αφού $|x - 2| \geq 0$. Αυτό φαίνεται και από την παράσταση όπως γράφτηκε στο υποερώτημα α, αφού για $x \geq 2$ είναι $x - 1 > 1$ και ομοίως για $x < 2$ είναι $-x + 3 > 1$.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία $K = 0,99$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x| = 1$ (1).

(Μονάδες 12)

β) Να λύθεί η ανίσωση $|6x| \leq 6$ (2) .

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x=1$ και $x=-1$.

β) Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών η ανίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα

$$|6x| \leq 6 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = x + 1, x \neq 1$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 3^0 - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1, \quad x \neq 1.$

β) Είναι: $x = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Άρα $A = x + 1 = 0 + 1 = 1$.

γ) Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2 , πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$x + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = 1,$$

που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το x .

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 .

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 3^0 - \frac{1}{2}$.

γ)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}, \quad x \neq 0, x \neq 1.$

β) Είναι: $x = 3^0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$ Άρα $A = \frac{x+1}{x} = \frac{0,5+1}{0,5} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{15}{5} = 3.$

γ)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$$A = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{x+1}{x} = 0, \text{ που συμβαίνει όταν}$$

$$x+1 = 0, \text{ δηλαδή όταν}$$

$$x = -1.$$

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2 , πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x = 1, \text{ που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το } x.$$

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 .

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Στο τέλος του πρώτου μήνα είχαν κατασκευαστεί 5 τέτοια οχήματα, στο τέλος του δεύτερου μήνα 18, στο τέλος του τρίτου μήνα 31 κ.ο.κ.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα στο τέλος του τέταρτου, του πέμπτου και του έκτου μήνα;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τον πρώτο χρόνο;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Στο τέλος του 4^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα, στο τέλος του 5^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του 6^{ου} μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τον πρώτο χρόνο (στο τέλος του 12^{ου} μήνα δηλαδή) κατασκευάστηκαν:

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + 11\omega = 5 + 11 \cdot 13 = 148 \text{ αυτοκίνητα.}$$

δ) Ζητάται τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu \geq 250, \text{ δηλαδή}$$

$$5 + (\nu - 1)13 \geq 250, \text{ οπότε}$$

$$(\nu - 1) \geq \frac{245}{13}, \text{ δηλαδή}$$

$$\nu \geq \frac{245}{13} + 1 \text{ και τελικά}$$

$$\nu \geq 19\frac{11}{13}.$$

Οπότε μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 6, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $f(0), f(3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

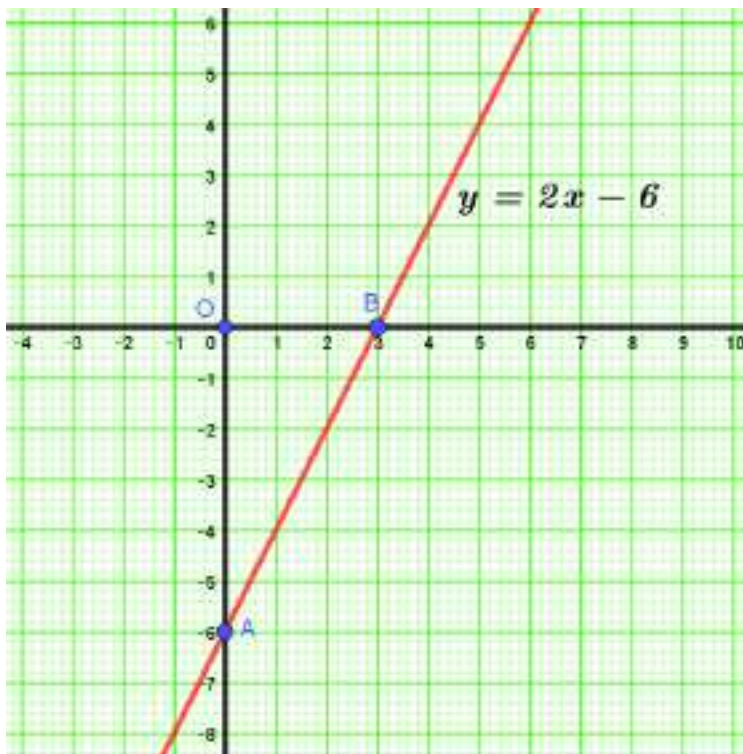
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $f(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6$.

$f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία, η οποία, με βάση τα παραπάνω, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -6)$. Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x - 20, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 - 16, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την τετμημένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης της f , του οποίου η τεταγμένη είναι -24 .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$, παίρνουμε $g(0) = 0^2 - 16 = -16$, άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -16)$.

Αν είναι x η τετμημένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης της g , τότε η τεταγμένη του θα είναι $g(x)$ και αυτή θέλουμε να είναι μηδέν, αφού όλα τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη μηδέν. Οπότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ή } x = -4)$. Άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(4, 0)$ και $\Gamma(-4, 0)$.

β) Η τετμημένη x ενός κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι λύση της εξίσωσης $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 16 = 4x - 20 \Leftrightarrow x^2 - 16 - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\Delta(2, -12)$ αφού

$$f(2) = g(2) = -12.$$

γ) Αν είναι x η ζητούμενη τετμημένη, πρέπει $f(x) = -24 \Leftrightarrow 4x - 20 = -24 \Leftrightarrow 4x = 20 - 24 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να δείξετε ότι:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $\alpha > 1, \beta < 1$.

α) Να δείξετε ότι $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$.

(Μονάδες 15)

β) Με χρήση του α) ή με οποιονδήποτε τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha > 1$, οπότε $\alpha - 1 > 0$ και $\beta < 1$, οπότε $\beta - 1 < 0$. Συνεπώς $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$, ως γινόμενο ετρόσημων αριθμών.

β) Από το α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$, οπότε $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 < 0$ και τελικά $\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $1 < \alpha < 3$.

α) Να δείξετε ότι $|\alpha - 1| = \alpha - 1$ και $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

(Μονάδες 15)

α) Να δείξετε ότι $|\alpha - 1| + |\alpha - 3| = 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

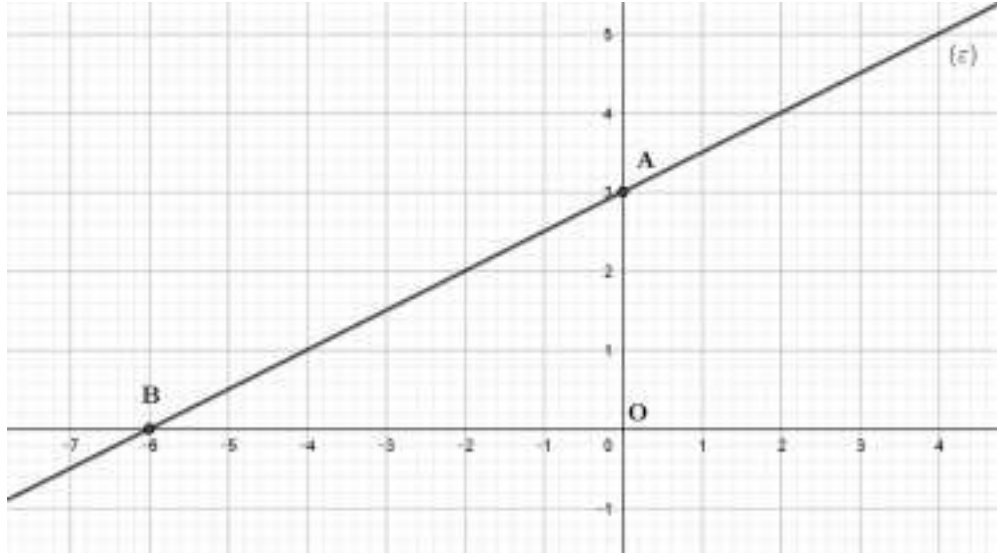
α) Αφού $1 < \alpha$ είναι $\alpha - 1 > 0$ οπότε $|\alpha - 1| = \alpha - 1$.

Ομοίως αφού $\alpha < 3$ είναι $\alpha - 3 < 0$ οπότε $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $|\alpha - 1| + |\alpha - 3| = \alpha - 1 + 3 - \alpha = 2$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η κλίση της ευθείας (ε) ισούται με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,3)$.

β) Η κλίση της ευθείας (ε) είναι $\varepsilon\varphi(\widehat{OBA}) = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε $\beta = 3$ και από το β) ερώτημα έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$, άρα η εξίσωση της

ευθείας (ε) είναι: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

(Μονάδες 12)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y .

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το

$$B = \left\{-6, -4, 0, -\frac{25}{4}\right\}.$$

ΘΕΜΑ 4

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα Α, Β, Γ, Δ.

Αν καθένα από τα Α, Β έχει πλευρά ίση με x , $x > 0$

τότε:

α) Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος.

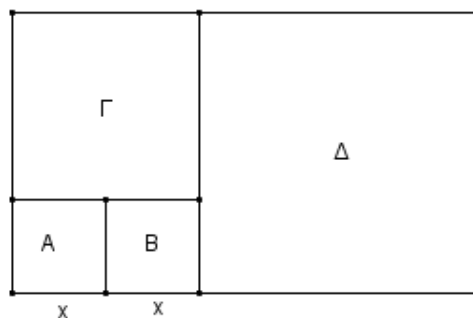
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του $E(x)$ ισχύει $E(x) = 15x^2$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού x το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τον τρόπο κατασκευής του σχήματος, προκύπτει ότι το τετράγωνο Γ έχει πλευρά $2x$ και το τετράγωνο Δ έχει πλευρά $3x$, οπότε το σχήμα (ορθογώνιο) που σχηματίζεται έχει μήκος $2x + 3x = 5x$ και πλάτος $3x$.

Άρα η περίμετρός του, έστω $\Pi(x)$ είναι

$$\Pi(x) = 2(5x + 3x) = 16x, x > 0$$

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του σχήματος είναι

$$E(x) = 3x \cdot 5x = 15x^2, x > 0$$

γ) Με $x > 0$ έχουμε:

$$E(x) < 240 \Leftrightarrow 15x^2 < 240 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) < 0 \stackrel{x+4>0}{\Leftrightarrow} x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Άρα το εμβαδόν του σχήματος είναι μικρότερο του 240 μόνο όταν το μήκος του αρχικού τετραγώνου είναι μικρότερο του 4.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(2)$ και $f(-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 7$.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $f(0) = |0-2|+3=5$, $f(2) = |2-2|+3=3$ και $f(-2) = |-2-2|+3=7$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow$$

$$|x-2|+3=7 \Leftrightarrow$$

$$|x-2|=4, \text{ οπότε}$$

$$x-2=4 \text{ ή } x-2=-4 \text{ και τελικά}$$

$$x=6 \text{ ή } x=-2.$$

γ) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x) = 2, \text{ δηλαδή}$$

$$|x-2|+3=2, \text{ οπότε}$$

$$|x-2|=2-3 \text{ και τελικά}$$

$$|x-2|=-1 \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Άρα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. Τέμνει η γραφική παράσταση της f τον $y'y$ άξονα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν στη γραφική παράσταση της f υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x \neq 0$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της είναι $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$, αφού

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, γιατί $x \neq 0$.

γ) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει x , ώστε:

$$f(x) = 1, \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{x-1}{x} = 1, \text{ οπότε}$$

$$x-1 = x \text{ και τελικά}$$

$$0x = -1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Άρα στη γραφική παράσταση της f δεν υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-x}{3x^2-x-2}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

β) Να παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 5)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = \frac{1}{4}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει να ορίζεται το κλάσμα, δηλαδή ο παρονομαστής να μη γίνεται μηδέν.

Το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$ μηδενίζεται για $x = 1$ ή $x = -\frac{2}{3}$.

Επομένως, η συνάρτηση f ορίζεται για όλα τα x που ανήκουν στο $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, 1\right\}$.

β) Ο παρονομαστής της συνάρτησης είναι το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$. Από το α ερώτημα βρήκαμε τα x για τα οποία μηδενίζεται.

Άρα σύμφωνα με τον γενικό τύπο παραγοντοποίησης τριωνύμου έχουμε:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x + 2).$$

γ) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης πρέπει να παραγοντοποιήσουμε και αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος.

$$\text{Συνεπώς, } f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(3x+2)} = \frac{x}{3x+2}.$$

$$\delta) \text{ Έχουμε: } |f(x)| = \frac{1}{4} \text{ ή } \left| \frac{x}{3x+2} \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{3x+2} = \frac{1}{4} \text{ ή } \frac{x}{3x+2} = -\frac{1}{4}$$

τότε

$$\begin{aligned} 4x &= 3x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \\ &\text{ή} \\ 4x &= -3x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{2}{7}$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $M(3,6)$ και $O(0,0)$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y = 2x$

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και διέρχεται από το σημείο $K(0,4)$.

(Μονάδες 9)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (η) με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας (ε) είναι $\alpha = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x$, όπου $\alpha = 2$.

Τελικά η εξίσωσή της ευθείας (ε) είναι $y = 2x$.

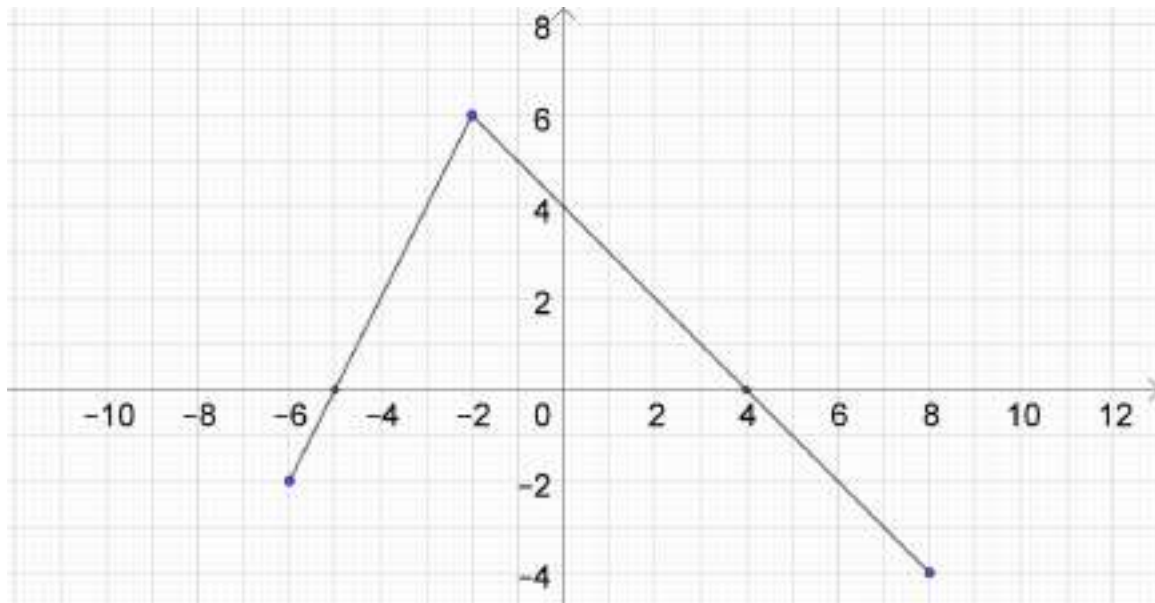
β)

i. Η ευθεία (η) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) οπότε έχουν την ίδια κλίση. Επομένως η κλίση της ευθείας (η) είναι 2 και αφού διέρχεται από το $K(0,4)$, δηλαδή τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη 4, θα έχει εξίσωση $y = 2x + 4$.

ii. Η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας (η) με τον άξονα xx' , είναι η λύση της εξίσωσης $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$. Τελικά το σημείο τομής της ευθείας (η) με τον άξονα xx' , είναι το $(-2,0)$.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης, δηλαδή το $A = [-6, 8]$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(-2, 6)$ οπότε $f(-2) = 6$. Επίσης διέρχεται από το σημείο $(0, 4)$ οπότε $f(0) = 4$ και από το σημείο $(3, 1)$ οπότε $f(3) = 1$.

γ) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) = 0$, είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον xx' , δηλαδή $x = -5$ και $x = 4$.

δ) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) < 0$, είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα xx' , δηλαδή $x \in [-6, -5) \cup (4, 8]$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, υπολογίζοντας την διακρίνουσά της.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) έχει : $\alpha=1$, $\beta=-3$ και $\gamma=-4$.

Οπότε $\Delta=(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$.

Επειδή η διακρίνουσα είναι θετική η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες :

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x , ισχύει:

$$(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 4(x + 2).$$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε την ανίσωση $(x + 3)^2 - (x + 1)^2 > 0$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 - (x+1)^2 &= [(x+3) + (x+1)] \cdot [(x+3) - (x+1)] = \\ &= (2x+4)(x+3-x-1) = (2x+4) \cdot 2 = 4(x+2).\end{aligned}$$

β) Με βάση το ερώτημα α) η ανίσωση γίνεται:

$$4(x+2) > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$x+2 > 0.$$

Άρα, $x > -2$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x| \leq 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x - 7 \geq -4(x - 2)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 7)

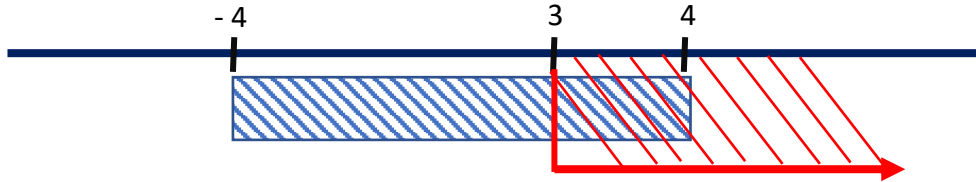
ΛΥΣΗ

α) $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$, δηλαδή $x \in [-4, 4]$.

β) Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα στο 2^ο μέλος, παίρνουμε

$$x - 7 \geq -4x + 8 \text{ άρα } 4x + x \geq 7 + 8 \Leftrightarrow 5x \geq 15 \Leftrightarrow \frac{5x}{5} \geq \frac{15}{5} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

γ)



Κοινές λύσεις είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $3 \leq x \leq 4$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ με $x \neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ με $x \neq 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x-2} = x+2$ με $x \neq 2$.

β) Έχουμε $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x+2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 4-2 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Πρέπει $x \neq 2$, άρα η παραπάνω ανίσωση αληθεύει για κάθε $x < 2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\lambda = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τον 7^ο όρο α_7 της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda \Leftrightarrow 8 = \alpha_1 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$.

β) Είναι $\alpha_7 = \alpha_1 \cdot \lambda^6 = 4 \cdot 2^6 = 4 \cdot 64 = 256$.

γ) Είναι $S_7 = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^7 - 1}{\lambda - 1} = 4 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 4 \cdot 127 = 508$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $\alpha - 3 \leq 0$ και $\beta + 2 \geq 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $|\alpha - \beta| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = 5$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$, οπότε $\alpha \leq 3 \Leftrightarrow \alpha - 3 \leq 0$.

Επίσης $-2 \leq \beta \leq -1$, οπότε $\beta \geq -2 \Leftrightarrow \beta + 2 \geq 0$.

β) Είναι $-2 \leq \beta \leq -1$, οπότε $1 \leq -\beta \leq 2$ και με πρόσθεση κατά μέλη με την $2 \leq \alpha \leq 3$ έχουμε $1 + 2 \leq \alpha - \beta \leq 2 + 3 \Leftrightarrow 3 \leq \alpha - \beta \leq 5$.

γ) Αφού $\alpha - 3 \leq 0$, είναι $|\alpha - 3| = -\alpha + 3$.

Επίσης, αφού $\beta + 2 \geq 0$, είναι $|\beta + 2| = \beta + 2$.

Τέλος, αφού $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$, είναι $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επομένως $|\alpha - \beta| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = \alpha - \beta - \alpha + 3 + \beta + 2 = 5$.

ΘΕΜΑ 4

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύουν

$$d(x,1) \leq 2 \quad (1)$$

$$d(x,4) \geq 3 \quad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 5)

γ) Για κάθε $x \in [-1,1]$,

i. να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι $|x-1| + |x+1| = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε αλγεβρικά ότι $|x-1| + |x+1| = 2$.

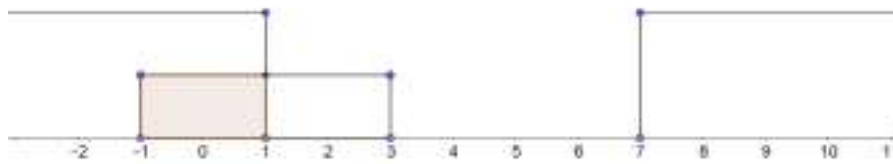
(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(x,1) \leq 2 \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Για την (2), αναζητούμε αριθμούς που απέχουν από το 4 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3, οπότε $x \leq 1$ ή $x \geq 7$.

β) Συναληθεύοντας τις λύσεις των (1) και (2), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε ότι $x \in [-1,1]$.



γ)

i. Η παράσταση $|x-1| + |x+1|$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς 1 και -1 αντίστοιχα και επειδή $-1 \leq x \leq 1$, είναι

$$|x-1| + |x+1| = d(x,1) + d(x,-1) = d(-1,1) = 2.$$

ii. Επίσης, αφού $x \in [-1,1]$, έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ \text{και} \\ x+1 \geq 0 \end{cases}, \text{ οπότε } |x-1| = -x+1 \text{ και } |x+1| = x+1$$

και επομένως έχουμε $|x-1| + |x+1| = -x+1 + x+1 = 2$.

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα

$$d(x, 2) \leq 1 \quad (1)$$

$$d(y, 4) \leq 3 \quad (2).$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) αλγεβρικά και την ανίσωση (2) γεωμετρικά με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών .

(Μονάδες 10)

β) Αν $1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7$ να δείξετε ότι:

i. η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20.

(Μονάδες 7)

ii. $|x - y| \leq 8$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(x,2) \leq 1 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [1,3]$.

Για την (2), αναζητούμε αριθμούς y που να απέχουν από το 4 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3, οπότε είναι $1 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow y \in [1,7]$.

β) Έχουμε ότι: $-1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7$.

i. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι $\Pi = 2x + 2y$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7$ έχουμε :

$$1+1 \leq x+y \leq 3+7 \Leftrightarrow 2 \leq x+y \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq 2x+2y \leq 20 \Leftrightarrow 4 \leq \Pi \leq 20$$

οπότε πράγματι η εν λόγω περίμετρος είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20.

ii. Είναι $1 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq -y \leq -1$ και με πρόσθεση κατά μέλη με την $1 \leq x \leq 3$ έχουμε

$$1-7 \leq x-y \leq -1+3 \Leftrightarrow -6 \leq x-y \leq 2 \text{ οπότε είναι και}$$

$$-6 \leq x-y \leq 2 \Leftrightarrow |x-y| \leq 6$$

$$\text{Εναλλακτικά, } |x-y| = |x-2-(y-4)-2| \leq |x-2| + |y-4| + 2 \leq 1+3+2=6$$

και άρα $|x-y| \leq 6$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 4, 8, 16, 32,

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο λόγος λ της προόδου είναι $\frac{8}{4} = 2$. Δηλαδή $\lambda = 2$.

β) Έχουμε

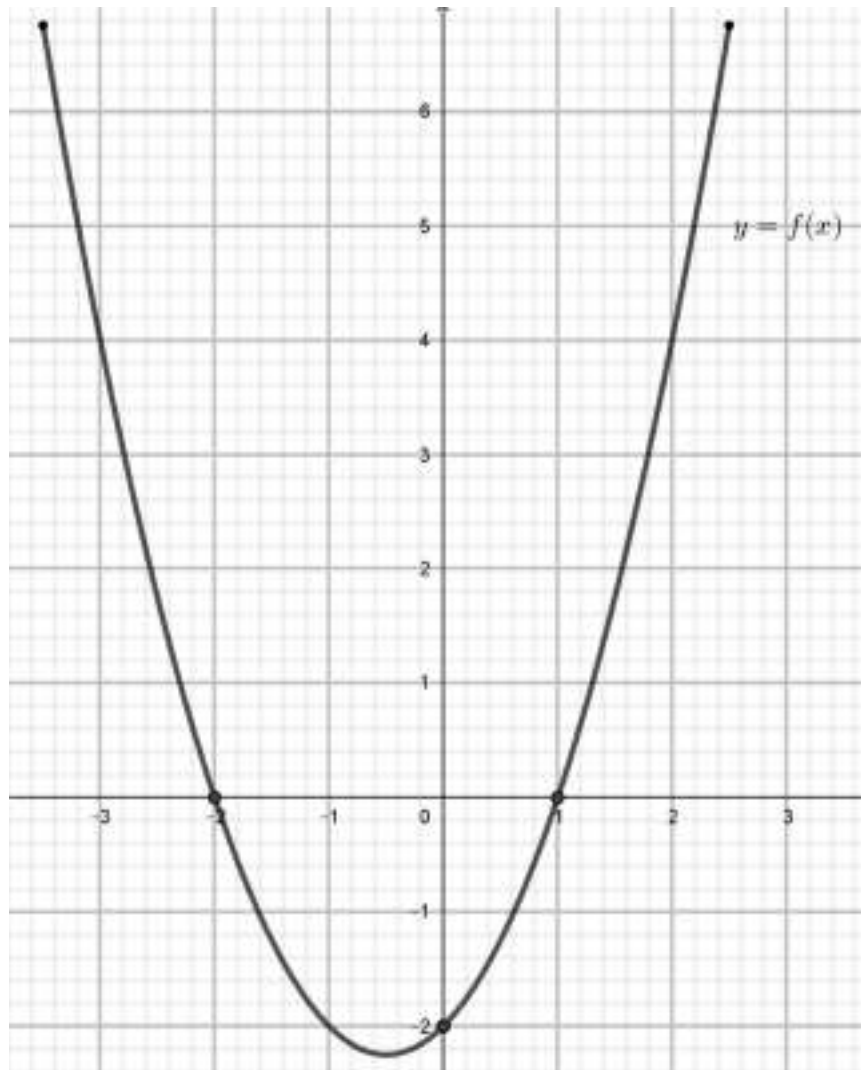
$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 4 \cdot 2^9 = 4 \cdot 512 = 2048.$$

γ) Έχουμε

$$S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4 \cdot 1023 = 4092.$$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , με $-3,5 \leq x \leq 2,5$.



α)

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραπάνω γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον $x'x$ άξονα;

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία της παραπάνω γραφικής παράστασης που έχουν τεταγμένη $y = 4$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι δύο, το $(-2,0)$ και το $(1,0)$. Με τον $y'y$ άξονα το σημείο τομής είναι το $(0,-2)$.

ii. Η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα για $x \in (-2,1)$.

β) Στη γραφική παράσταση υπάρχουν δυο σημεία με τεταγμένη $y = 4$, το $(-3,4)$ και το $(2,4)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$x - 1 > 1 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2x - 3 < 5 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$x - 1 > 1 \Leftrightarrow$$

$$x > 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x > 2.$$

β) Έχουμε:

$$2x - 3 < 5 \Leftrightarrow$$

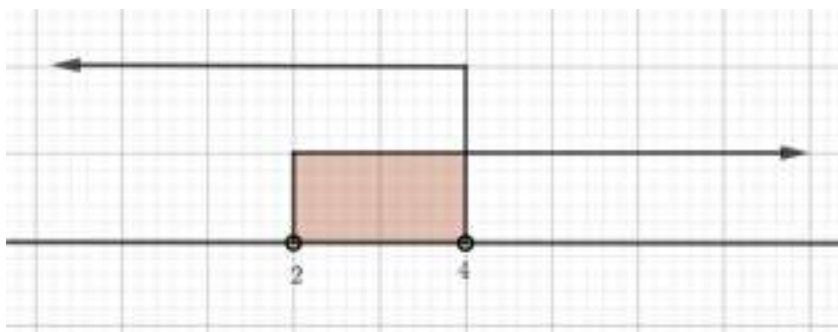
$$2x < 5 + 3 \Leftrightarrow$$

$$2x < 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

$$x < 4.$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ως εξής:



Οπότε οι κοινές τους λύσεις είναι οι πραγματικοί αριθμοί x μεταξύ 2 και 4, δηλαδή $x \in (2, 4)$.

ΘΕΜΑ 4

Οι τρεις πρώτοι όροι μιας γεωμετρικής προόδου, με τη σειρά που δίνονται, είναι:

$$k-1, 6 \text{ και } 3k, \quad k \in \mathbb{R} - \{0,1\}.$$

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του $k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $k = 4$, να βρείτε

i. τον τέταρτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

ii. τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό $3 \cdot 2^8$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Οι $k-1$, 6 και $3k$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου, άρα ισχύει:

$$\frac{6}{k-1} = \frac{3k}{6}, \text{ οπότε}$$

$$3k \cdot (k-1) = 36, \text{ δηλαδή}$$

$$k \cdot (k-1) = 12, \text{ οπότε}$$

$$k^2 - k - 12 = 0, \text{ που είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με}$$

$$\text{άθροισμα ριζών: } k_1 + k_2 = \frac{-(-1)}{1} = 1 \text{ και}$$

$$\text{γινόμενο ριζών } k_1 \cdot k_2 = \frac{-12}{1} = -12, \text{ οπότε}$$

$$k_1 = 4 \text{ και } k_2 = -3.$$

Τελικά οι δυνατές τιμές του k είναι -3 και 4 .

β) Για $k = 4$,

i. οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι $3, 6$ και 12 οπότε η γεωμετρική πρόοδος έχει

λόγο $\lambda = \frac{6}{3} = 2$. Ο τέταρτος όρος της προόδου είναι $12 \cdot 2 = 24$.

ii. η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και λόγο $\lambda = 2$, οπότε ο n -οστός όρος

είναι $\alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. Ζητάμε την μικρότερη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\alpha_n > 3 \cdot 2^8, \text{ δηλαδή}$$

$$3 \cdot 2^{n-1} > 3 \cdot 2^8, \text{ οπότε}$$

$$2^{n-1} > 2^8,$$

οπότε με δοκιμή βρίσκουμε ότι πρέπει $n-1 > 8$, δηλαδή $n > 9$. Άρα ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το αριθμό $3 \cdot 2^8 (=768)$ είναι ο $10^{\text{ος}}$ όρος της προόδου.

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) , δηλαδή το κόστος για έναν καλεσμένο είναι α_1 , για δυο καλεσμένους είναι α_2 , ..., για πενήντα καλεσμένους α_{50} , ..., για εκατό καλεσμένους α_{100} , κοκ.

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1317$ και η διαφορά $\omega = 107$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 85 καλεσμένους.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560.$$

Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910.$$

Οπότε:

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \text{ και}$$

$$\alpha_1 + 99\omega = 11910.$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$50\omega = 5350 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 107.$$

Άρα,

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 + 5243 = 6560 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = 1317.$$

β) Το κόστος για ν καλεσμένους είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 1317 + (\nu - 1) \cdot 107 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 107\nu + 1210.$$

γ) Το κόστος για 85 καλεσμένους θα είναι $\alpha_{85} = 107 \cdot 85 + 1210 = 10305$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: $4, 8, 12, \dots$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η διαφορά της προόδου είναι ίση με τη διαφορά δυο διαδοχικών όρων της, δηλαδή $\omega = 8 - 4 = 4$.

β) Ο πρώτος όρος της προόδου (α_n) είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 4$. Οπότε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 4 + 19 \cdot 4 = 80.$$

γ) Έχουμε $S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{20}) = \frac{20}{2} \cdot (4 + 80) = 10 \cdot 84 = 840$.