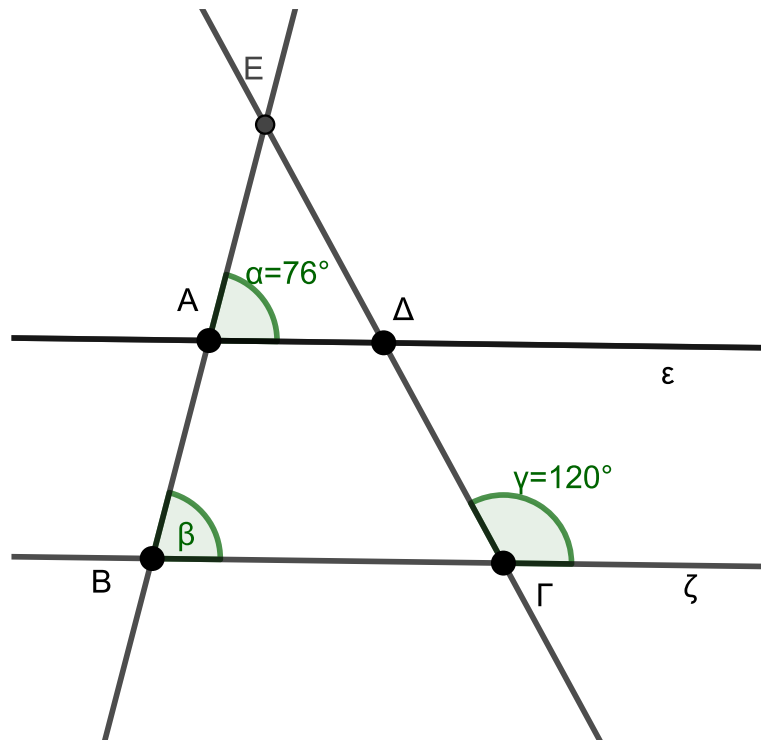




α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ και ζ που τέμνονται από την ευθεία AB . Οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma}$ που δίνεται ότι είναι ίση με 120° . Άρα $B\hat{\Gamma}E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $EB\Gamma$ γνωρίζουμε ήδη ότι $\hat{\beta} = 76^\circ$. Επιπλέον βρήκαμε ότι $B\hat{\Gamma}E = 60^\circ$. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $EB\Gamma$ είναι 180° , οπότε $\hat{\beta} + B\hat{\Gamma}E + B\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ ή $76^\circ + 60^\circ + B\hat{E}\Gamma = 180^\circ$, δηλαδή $136^\circ + B\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ ή $B\hat{E}\Gamma = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$.

52 Θέμα 2 - 12533

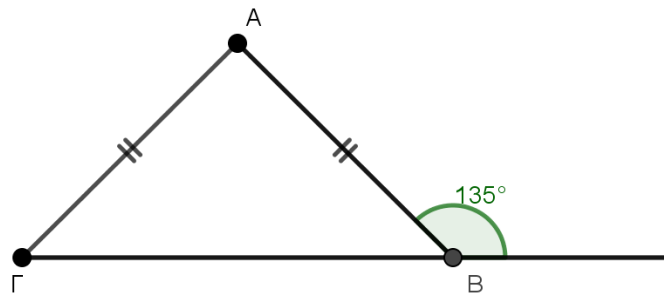
ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η $\widehat{A} = 90^\circ$ άρα $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Όμως η $\widehat{\Gamma} = 40^\circ$
άρα η $\widehat{B} = 50^\circ$.

β) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β οπότε λόγω του ερωτήματος (α)

$$\eta \widehat{AB\Delta} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\widehat{AB\Delta} + \widehat{B\Delta A} = 90^\circ$ ή $25^\circ + \widehat{B\Delta A} = 90^\circ$
άρα $\widehat{B\Delta A} = 65^\circ$.



α) Στο τρίγωνο ABΓ δίνεται ότι $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 135^\circ$ και επιπλέον ισχύει $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} + \widehat{B} = 180^\circ$,

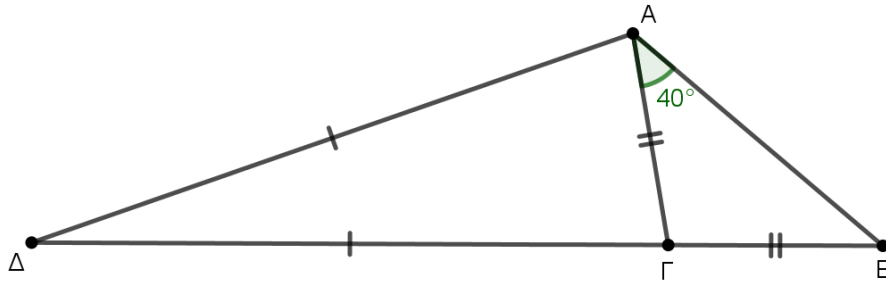
άρα $\widehat{B} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Επειδή $AB = A\Gamma$, τότε οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ θα είναι ίσες, άρα $\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = 45^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε

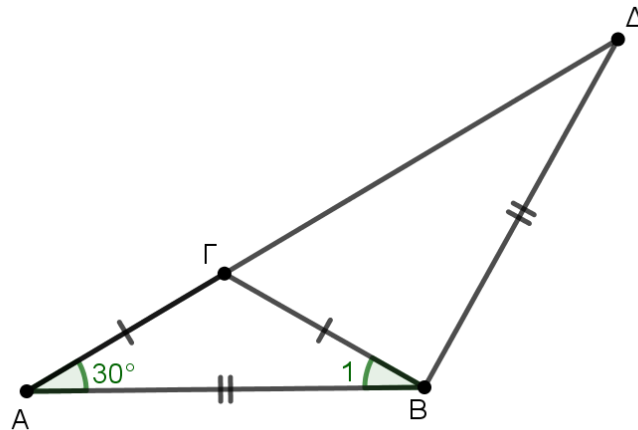
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $\widehat{A} + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{A} = 90^\circ$.

β) Από την υπόθεση $AB = A\Gamma$ άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. Από ερώτημα α) η γωνία $\widehat{A} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. Συνεπώς το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



α) Στο τρίγωνο ΓΑΒ είναι $ΓΑ=ΓΒ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Β}$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες της βάσης του ΑΒ. Άρα $\widehat{Β} = 40^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε: $\widehat{ΑΓΒ} + \widehat{Α} + \widehat{Β} = 180^\circ$ και επειδή $\widehat{Α} = \widehat{Β} = 40^\circ$ είναι $\widehat{ΑΓΒ} + 80^\circ = 180^\circ$, άρα $\widehat{ΑΓΒ} = 100^\circ$.

γ) Η γωνία $\widehat{ΔΓΑ}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΓΑΒ, οπότε θα ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών. Δηλαδή $\widehat{ΔΓΑ} = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με $ΔΑ=ΔΓ$ τότε οι γωνίες $\widehat{ΔΓΑ}$ και $\widehat{ΓΑΔ}$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες της βάσης του ΑΓ. Οπότε $\widehat{ΓΑΔ} = 80^\circ$. Τέλος, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου, στο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε: $\widehat{ΑΔΓ} + \widehat{ΔΓΑ} + \widehat{ΓΑΔ} = 180^\circ$ και επειδή $\widehat{ΔΓΑ} = \widehat{ΓΑΔ} = 80^\circ$ είναι $\widehat{ΑΔΓ} + 160^\circ = 180^\circ$, άρα $\widehat{ΑΔΓ} = 20^\circ$.



α)

- i. Στο τρίγωνο ΓΑΒ είναι $\Gamma A = \Gamma B$, άρα αυτό είναι ισοσκελές και οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}_1$ θα είναι ίσες ως γωνίες της βάσης του ΑΒ. Άρα $\hat{A} = \hat{B}_1 = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + \hat{A} + \hat{B}_1 = 180^\circ$ και επειδή $\hat{A} = \hat{B}_1 = 30^\circ$ είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + 60^\circ = 180^\circ$, άρα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 120^\circ$.
- ii. Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $BA = BD$ από την υπόθεση, οπότε οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ θα είναι ίσες ως γωνίες της βάσης του ΑΔ. Άρα $\hat{A} = \hat{\Delta} = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΒΑΔ έχουμε: $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + 60^\circ = 180^\circ$, άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 120^\circ$.

β) Για τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ βρήκαμε στο ii. του α) ερωτήματος ότι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 120^\circ$. Επίσης από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{A} = 30^\circ$. Άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 120^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 4 \cdot \hat{A}$. Δηλαδή η γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ είναι 4-πλάσια της γωνίας $\hat{A}$.

56 Θέμα 2 - 13827

ΛΥΣΗ

α) α) Η γωνία $\widehat{B\Gamma O}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{B\Gamma E}$, οπότε θα ισχύει $\widehat{B\Gamma O} + \widehat{B\Gamma E} = 180^\circ$ και αφού $\widehat{B\Gamma E} = 110^\circ$ τότε $\widehat{B\Gamma O} + 110^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{B\Gamma O} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

β) Αφού είναι $\widehat{B\Gamma O} = 70^\circ$ από τα δεδομένα και $\widehat{B\Gamma O} = 70^\circ$ από το α) ερώτημα, τότε $\widehat{B\Gamma O} = \widehat{B\Gamma O}$. Οπότε το τρίγωνο $OB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις OB και OG .

γ) Για τις γωνίες του τριγώνου $OB\Gamma$ γνωρίζουμε ότι $\widehat{B\Gamma O} + \widehat{B\Gamma O} + \widehat{BO\Gamma} = 180^\circ$ με $\widehat{B\Gamma O} = \widehat{B\Gamma O} = 70^\circ$, οπότε $70^\circ + \widehat{BO\Gamma} + 70^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{BO\Gamma} = 180^\circ - 140^\circ$ ή $\widehat{BO\Gamma} = 40^\circ$.

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα ισχύει $\hat{\beta} + \hat{\alpha} = 180^\circ$

με $\hat{\beta} = 114^\circ$, οπότε θα είναι $114^\circ + \hat{\alpha} = 180^\circ$ ή $\hat{\alpha} = 180^\circ - 114^\circ$, άρα $\hat{\alpha} = 66^\circ$ (1).

Η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\beta}$, οπότε θα είναι $\widehat{AB\Gamma} + \hat{\beta} = 180^\circ$ με

$\hat{\beta} = 114^\circ$, οπότε θα είναι $\widehat{AB\Gamma} + 114^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{AB\Gamma} = 180^\circ - 114^\circ$, άρα $\widehat{AB\Gamma} = 66^\circ$ (2).

Έχουμε $\widehat{A\Gamma B} = \hat{\alpha}$, ως κατακορυφήν γωνίες με $\hat{\alpha} = 66^\circ$ (από σχέση (1)), οπότε $\widehat{A\Gamma B} = 66^\circ$ (3).

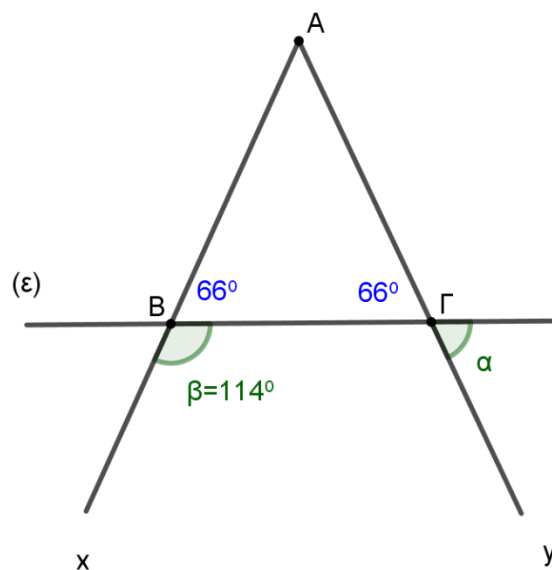
Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 66^\circ$.

β) Επειδή είναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B}$ από το α) ερώτημα, το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB, ΑΓ και βάση τη ΒΓ.

γ) Για τις γωνίες του τριγώνου ABΓ ισχύει $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} + \widehat{AB\Gamma} = 180^\circ$ με $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 66^\circ$

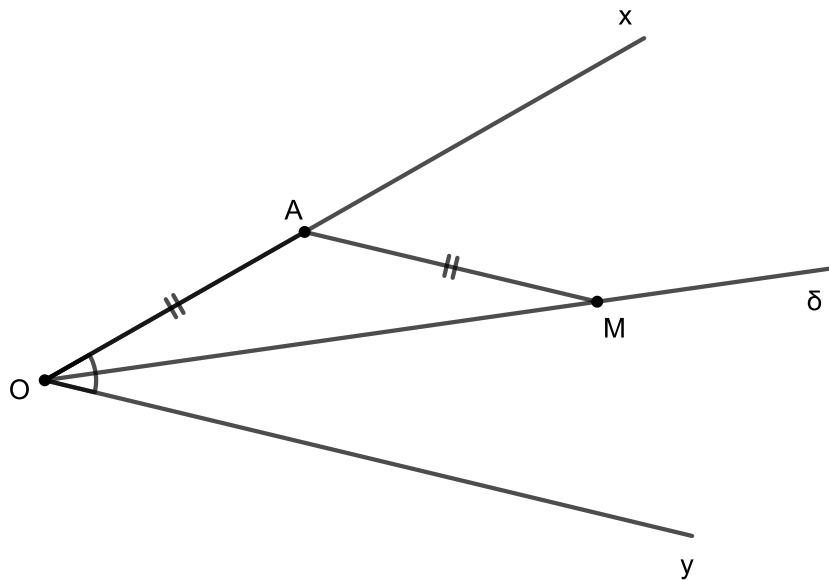
(από σχέση (4) του α) ερωτήματος), οπότε $\widehat{BA\Gamma} + 66^\circ + 66^\circ = 180^\circ$

ή $\widehat{BA\Gamma} = 180^\circ - 132^\circ$, άρα $\widehat{BA\Gamma} = 48^\circ$.



ΛΥΣΗ

α)



Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$, οπότε οι γωνίες $\widehat{xOd}$ και $\widehat{dOy}$ θα είναι ίσες. Άρα:

$$\widehat{xOd} = \widehat{dOy} = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$$

β) Είναι $\widehat{AOM} = \widehat{xOd} = 20^\circ$.

Το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με βάση OM, αφού $AO = AM$ από υπόθεση.

Επομένως, οι γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{AMO}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση. Άρα:

$$\widehat{AOM} = \widehat{AMO} = 20^\circ$$

Στο τρίγωνο AOM ισχύει:

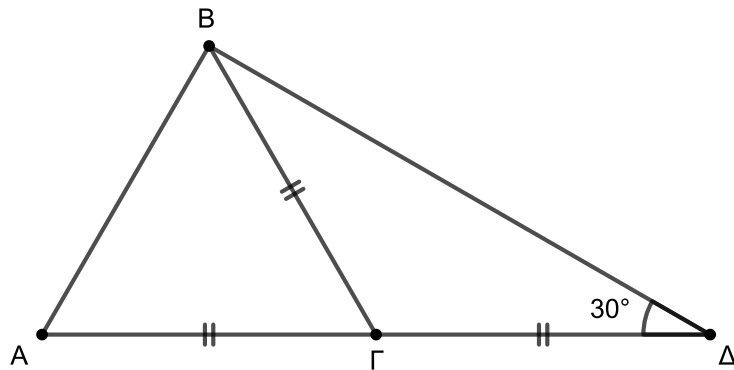
$$\widehat{AOM} + \widehat{AMO} + \widehat{MAO} = 180^\circ \text{ ή } 20^\circ + 20^\circ + \widehat{MAO} = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \widehat{MAO} = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ.$$

γ) Η γωνία $\widehat{MAO}$ του τριγώνου AOM είναι αμβλεία ως μεγαλύτερη των 90° , οπότε το τρίγωνο AOM είναι αμβλυγώνιο.

ΛΥΣΗ

α)



Το τρίγωνο BGD είναι ισοσκελές με $GB = GD$, οπότε οι γωνίες $\widehat{DBG}$ και $\widehat{D}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση BD. Άρα, $\widehat{DBG} = \widehat{D} = 30^\circ$.

Στο τρίγωνο BGD ισχύει:

$$\widehat{GBD} + \widehat{D} + \widehat{DBG} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{GBD} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \widehat{GBD} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

β) Οι γωνίες $\widehat{GBD}$ και $\widehat{GBA}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, αφού η γωνία $\widehat{GBA}$ είναι ευθεία, οπότε:

$$\widehat{GBD} + \widehat{GBA} = 180^\circ \text{ ή } 120^\circ + \widehat{GBA} = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \widehat{GBA} = 60^\circ.$$

γ) Το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές με $AG = GB$, οπότε οι γωνίες $\widehat{ABG}$ και $\widehat{A}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση AB.

Στο τρίγωνο ABG ισχύει:

$$\widehat{ABG} + \widehat{A} + \widehat{GBA} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{A} + \widehat{A} + 60^\circ = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{A} = 120^\circ.$$

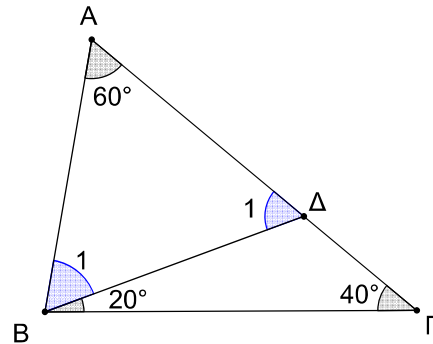
$$\text{Άρα, } \widehat{A} = 60^\circ \text{ και } \widehat{ABG} = 60^\circ.$$

Αφού $\widehat{ABG} = \widehat{A} = \widehat{GBA} = 60^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρο.

60 Θέμα 2 - 13438

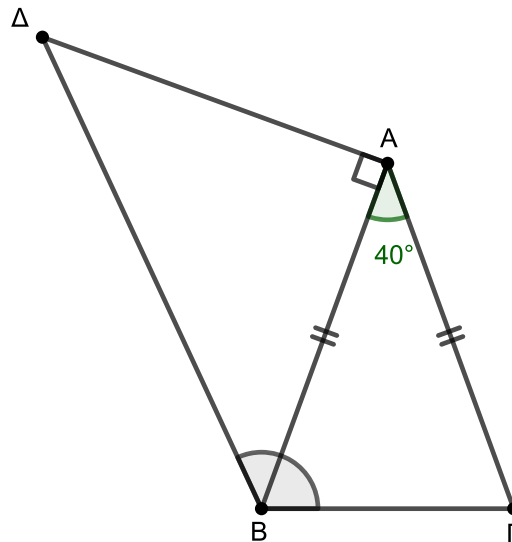
α) Θέτουμε $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \hat{\Delta}_1$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma\Delta$, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \widehat{B\Gamma\Delta} + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.



β) Από την υπόθεση και το ερώτημα α) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}_1$ του τριγώνου $AB\Delta$ είναι 60° . Αυτό σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60° , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

α)

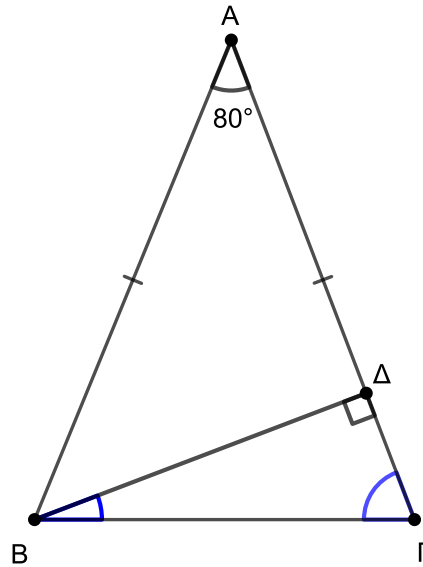


Στο αρχικό ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = A\Gamma$ άρα οι γωνίες της βάσης του $B\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ και, επειδή $\widehat{A} = 40^\circ$ έχουμε ότι $40^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ$. Δηλαδή $2\widehat{B} = 140^\circ$. Άρα $\widehat{B} = 70^\circ$, οπότε και $\widehat{\Gamma} = 70^\circ$.

β) Οι ίσες πλευρές του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου $B\Delta A$, που κατασκευάζεται εξωτερικά του $AB\Gamma$, είναι οι AB και $A\Delta$. Άρα οι γωνίες της βάσης του ΔB είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta B A}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Delta A$ έχουμε ότι $\widehat{B\Delta A} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Delta B A} = 180^\circ$. Επειδή $\widehat{B\Delta A} = 90^\circ$ αφού το τρίγωνο $B\Delta A$ είναι ορθογώνιο και λόγω της (1), προκύπτει ότι $90^\circ + 2\widehat{\Delta B A} = 180^\circ$. Δηλαδή $2\widehat{\Delta B A} = 90^\circ$, άρα $\widehat{\Delta B A} = 45^\circ$. Επομένως για τη γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma}$ έχουμε: $\widehat{\Delta B \Gamma} = \widehat{\Delta B A} + \widehat{B} = 45^\circ + 70^\circ = 115^\circ$ αφού από το α) ερώτημα βρήκαμε ότι $\widehat{B} = 70^\circ$.

62 Θέμα 2 - 12463

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, $\hat{A} = 80^\circ$. Φέρουμε το ύψος BD από την κορυφή B .

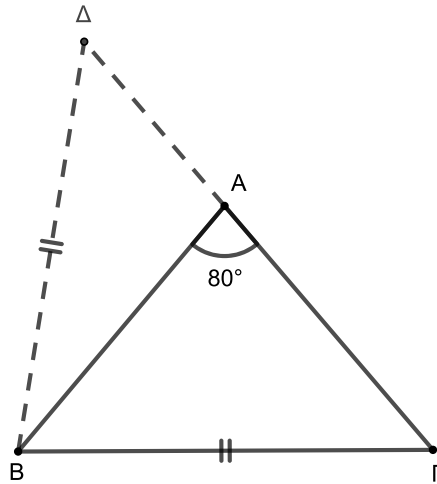


α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 80^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \text{ ή } \hat{B} = 50^\circ. \text{ Άρα και } \hat{\Gamma} = 50^\circ.$$

β) Η γωνία $\hat{\Gamma\Delta B}$ είναι ορθή, αφού $BD \perp AG$. Επομένως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι:

$$\hat{\Gamma\Delta B} + \hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 90^\circ + \hat{\Delta B\Gamma} + 50^\circ = 180^\circ \text{ ή } \hat{\Delta B\Gamma} = 40^\circ.$$



α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ και επειδή $\widehat{A} = 80^\circ$ από την υπόθεση και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $80^\circ + 2\widehat{B} = 180^\circ$. Δηλαδή $2\widehat{B} = 100^\circ$ επομένως $\widehat{B} = 50^\circ$, άρα και $\widehat{\Gamma} = 50^\circ$.

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $BA = B\Gamma$, επομένως το τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Delta\Gamma$. Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma\Delta B}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση του $\Delta\Gamma$, οπότε $\widehat{\Gamma\Delta B} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$ (2).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Gamma B\Delta$ ισχύει ότι $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta B} + \widehat{\Gamma B\Delta} = 180^\circ$ και λόγω της σχέσης (2) έχουμε ότι $2 \cdot 50^\circ + \widehat{\Gamma B\Delta} = 180^\circ$. Επομένως $\widehat{\Gamma B\Delta} = 80^\circ$ και επειδή από την υπόθεση $\widehat{A} = 80^\circ$, προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{A}$.

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε $AB = AG$ και η $AG = 5$ οπότε και η $AB = 5$.

β)

i. Εφόσον η AM είναι διχοτόμος του τριγώνου, συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της γωνίας A είναι διπλάσιο από το μέτρο της γωνίας BAM . Επομένως $\hat{A} = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$.

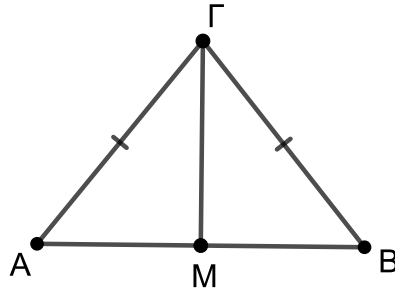
ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABG οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

Δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}(1)$.

Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, η οποία λόγω της (1) γράφεται:

$40^\circ + 2 \cdot \hat{B} = 180^\circ$ απ' όπου βρίσκουμε ότι η $\hat{B} = 70^\circ$.

Επομένως είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^\circ$.



α) Εφόσον $\widehat{\Gamma\hat{A}B} = 55^\circ$, τότε και η άλλη γωνία της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με 55° , δηλαδή $\widehat{\Gamma\hat{B}A} = 55^\circ$.

β) Το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓ είναι ίσο με 180° άρα:

$$\widehat{\Gamma\hat{A}B} + \widehat{\Gamma\hat{B}A} + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 180^\circ$$

ή

$$55^\circ + 55^\circ + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 180^\circ$$

ή

$$110^\circ + \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 180^\circ$$

ή

$$\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 180^\circ - 110^\circ$$

ή

$$\widehat{A\hat{\Gamma}B} = 70^\circ$$

γ) Το ΓΜ είναι ύψος του ισοσκελούς ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του. Άρα θα είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς, δηλαδή της $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$.

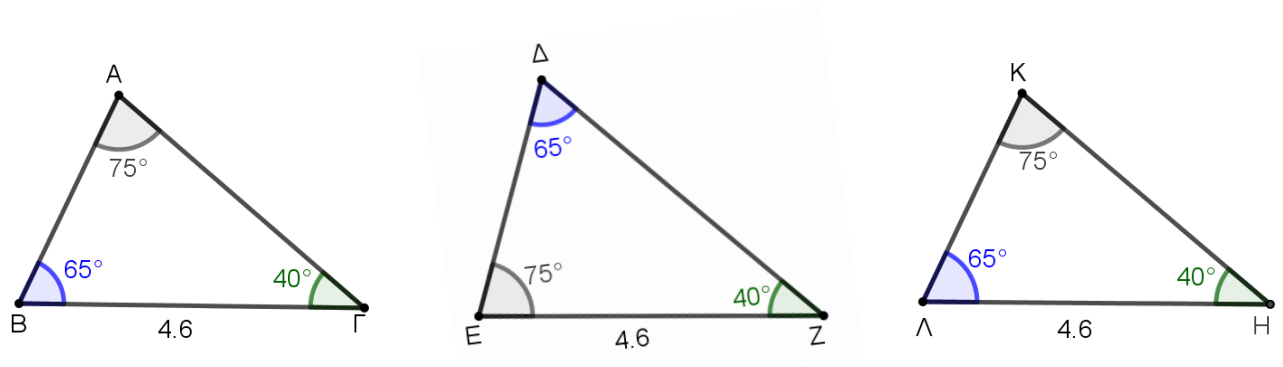
$$\text{Επομένως, } \widehat{A\hat{\Gamma}M} = \frac{\widehat{A\hat{\Gamma}B}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

α) Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (1) και επειδή $\hat{B} = 65^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\hat{A} + 65^\circ + 40^\circ = 180^\circ$, οπότε $\hat{A} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ έχουμε: $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^\circ$ (2) και επειδή $\hat{\Delta} = 65^\circ$ και $\hat{Z} = 40^\circ$, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $65^\circ + \hat{E} + 40^\circ = 180^\circ$, οπότε $\hat{E} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΚΛΗ έχουμε: $\hat{K} + \hat{\Lambda} + \hat{H} = 180^\circ$ (3) και επειδή $\hat{K} = 75^\circ$ και $\hat{\Lambda} = 65^\circ$, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $75^\circ + 65^\circ + \hat{H} = 180^\circ$, οπότε $\hat{H} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

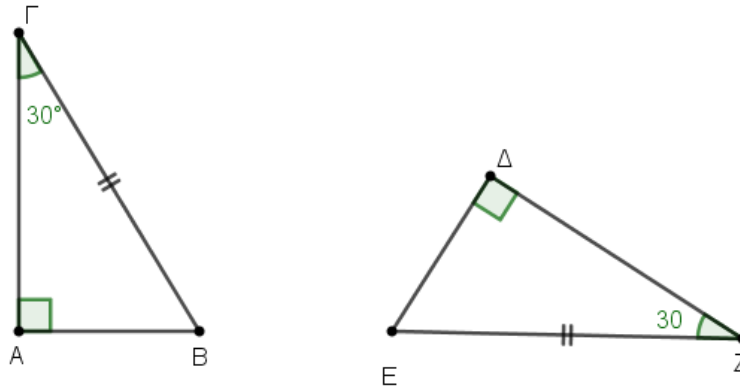
β)



Ίσα είναι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΗ γιατί έχουν:

- $B\Gamma = \Lambda H = 4.6$, από την υπόθεση
- $\hat{B} = \hat{\Lambda} = 65^\circ$, από την υπόθεση
- $\hat{\Gamma} = \hat{H} = 40^\circ$, από το ερώτημα α)

Δηλαδή είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή μία προς μία ίσες (Γ-Π-Γ).



α) Στο ορθογώνιο ΔΕΖ ισχύει ότι $\hat{Ε} + \hat{Ζ} = 90^\circ$. Άρα $\hat{Ε} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$BΓ = ΕΖ$, από υπόθεση,

$\hat{\Gamma} = \hat{Ζ} = 30^\circ$, από υπόθεση,

$\hat{Α} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.

γ) Αν είναι $AB = 5$, τότε θα είναι $\Delta E = 5$, επειδή είναι πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{Ζ}$ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ.

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει:

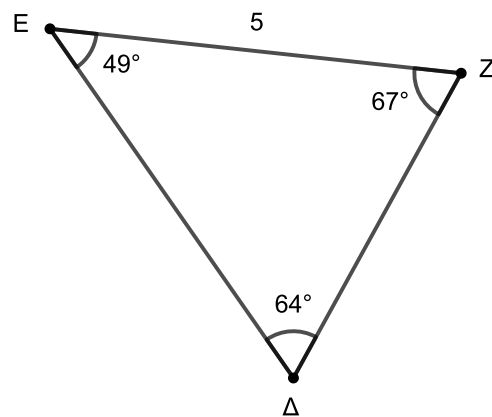
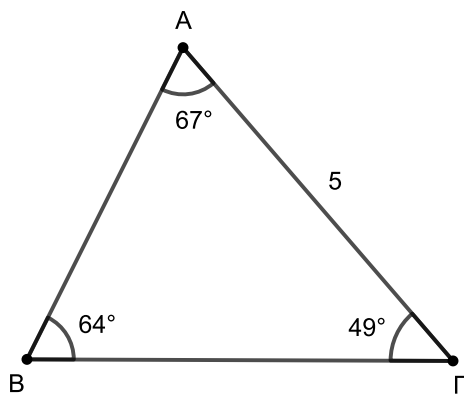
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 67^\circ + \hat{B} + 49^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{B} = 180^\circ - 67^\circ - 49^\circ = 64^\circ.$$

Στο τρίγωνο ΔΕΖ ισχύει:

$$\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^\circ \text{ ή } 64^\circ + \hat{E} + 67^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{E} = 180^\circ - 64^\circ - 67^\circ = 49^\circ.$$



β) Τα τρίγωνα ABΓ και ZΔΕ έχουν:

$$AG = EZ = 5$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{E} = 49^\circ$$

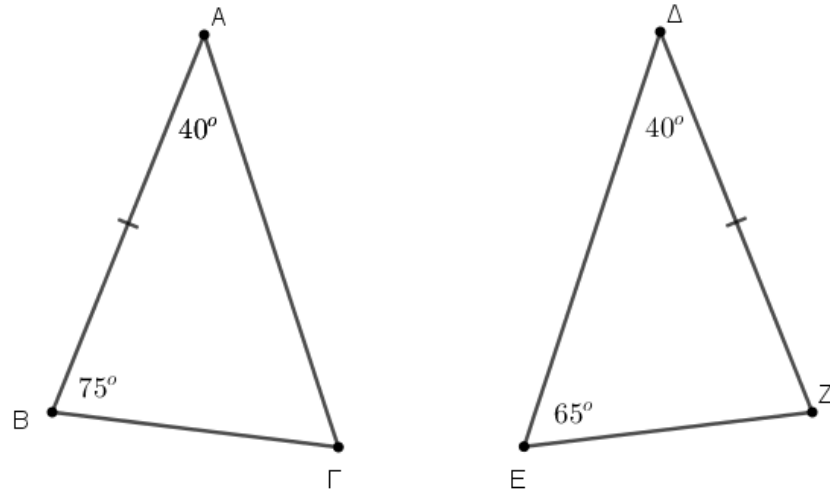
$$\hat{A} = \hat{Z} = 64^\circ$$

Επομένως, τα τρίγωνα ABΓ και ZΔΕ είναι ίσα αφού έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια (Γ-Π-Γ).

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ZΔΕ προκύπτει ότι:

BΓ = ΕΔ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Z}$ αντίστοιχα.

AB = ΔΖ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}$ αντίστοιχα.



α) Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ είναι 180° , έχουμε:

$$\hat{Z} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ \text{ ή } \hat{Z} + 40^\circ + 65^\circ = 180^\circ. \text{ Άρα, } \hat{Z} = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ = 75^\circ \quad (1).$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ έχουν:

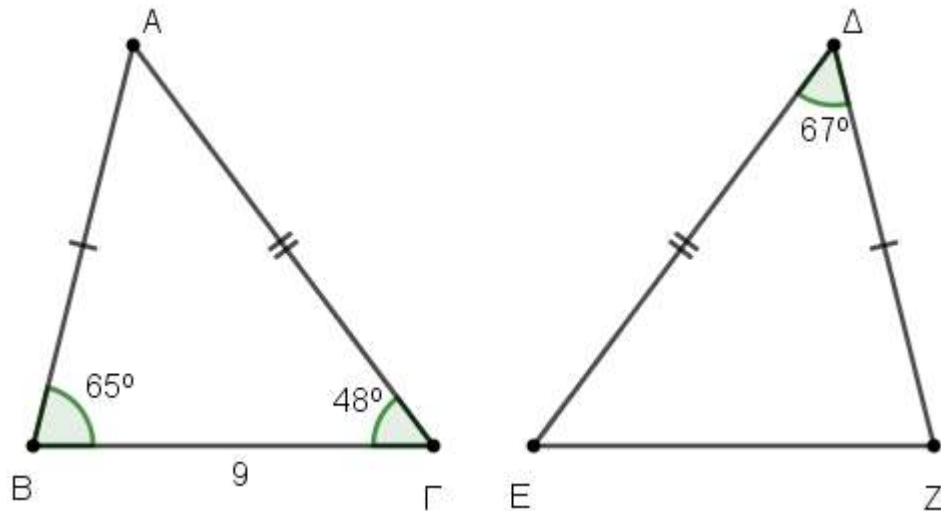
$AB = \Delta Z$, από υπόθεση,

$\hat{B} = 75^\circ$, από υπόθεση, και $\hat{Z} = 75^\circ$, από (1),

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 40^\circ$, από υπόθεση.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΖΕ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

γ) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $ΑΓ = ΔΕ$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Z}$ αντίστοιχα. Επομένως, $ΔΕ = 8$ αφού $ΑΓ = 8$.



α) Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ είναι 180° , έχουμε:

$$\hat{A} + 65^\circ + 48^\circ = 180^\circ \text{ άρα } \hat{A} = 180^\circ - 65^\circ - 48^\circ = 67^\circ (1).$$

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABΓ και ΔΖΕ. Αυτά έχουν:

$AB = ΔΖ$ από υπόθεση.

$ΑΓ = ΔΕ$ από υπόθεση.

$\hat{A} = \hat{\Delta} = 67^\circ$ από (1).

Επομένως είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΔΕΖ προκύπτει ότι $BΓ = ΕΖ$, αφού είναι απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα. Επομένως $EZ = 9$.

71 Θέμα 2 - 12511

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία του Α, είναι κατακορυφήν της γωνίας ΔΑΕ, οπότε $\hat{A} = 80^\circ$.

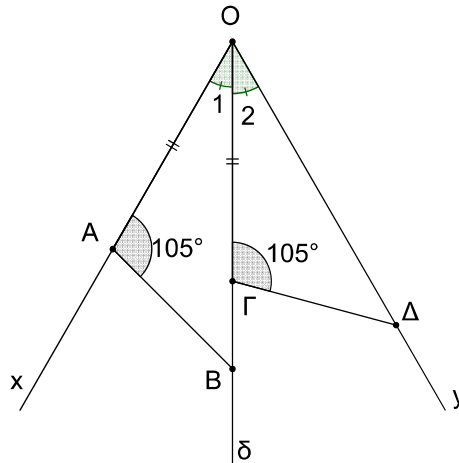
β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $80^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
άρα η $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

- $AB = AD$ εφόσον από την υπόθεση το Α είναι το μέσο του ΒΔ
- $AG = AE$ εφόσον από την υπόθεση το Α είναι το μέσο του ΓΕ
- $\hat{BAG} = \hat{DAE}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα (ΠΓΠ)

Αφού η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy} = 60^\circ$, θα είναι $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

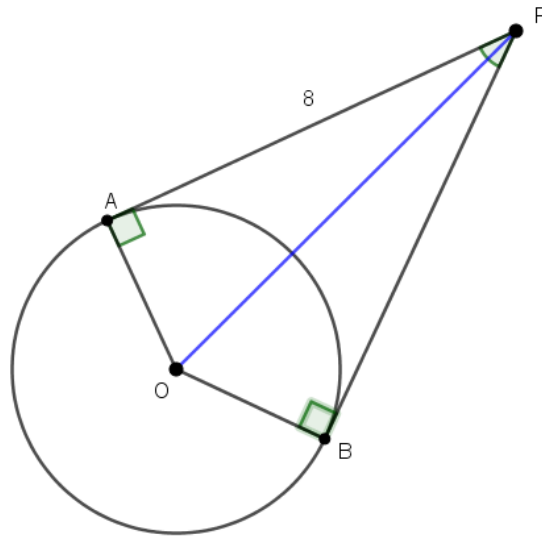


α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΟΑΒ είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{O}_1 = 180^\circ$. Όμως $\widehat{A} = 105^\circ$ και $\widehat{O}_1 = 30^\circ$, άρα $105^\circ + \widehat{B} + 30^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{B} = 45^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν:

- $OA = OG$, από τα δεδομένα.
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, γιατί η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$.
- $\widehat{A} = \widehat{G} = 105^\circ$, από τα δεδομένα.

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (κριτήριο ΓΠΓ). Συνεπώς, θα είναι $AB = GD$ ως ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2$ αντίστοιχα.



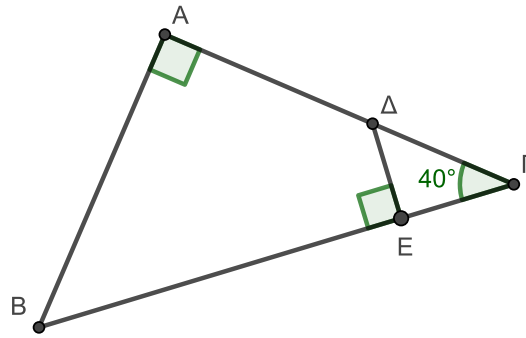
α) Επειδή τα PA και PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, θα είναι ίσα,
δηλαδή $PB = PA = 8$.

β) Η PO είναι διχοτόμος της γωνίας APB των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB,
οπότε $\widehat{APO} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

γ) Επειδή η PB είναι εφαπτόμενη στον κύκλο, θα είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής B. Άρα $\widehat{PBO} = 90^\circ$. Η PO είναι διχοτόμος της γωνίας APB των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB, άρα $\widehat{BPO} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

Στο τρίγωνο OPB ισχύει:

$$\widehat{POB} + \widehat{PBO} + \widehat{BPO} = 180^\circ, \text{ άρα } \widehat{POB} = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$$



α) Επειδή $DE \perp BG$ είναι $\widehat{DEB} = 90^\circ$

Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΕΓ, έχουμε:

$$\widehat{EDG} + \widehat{DEG} + \widehat{G} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{EDG} + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ \text{ ή } \widehat{EDG} = 50^\circ \quad (1)$$

β) Είναι $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$. Οι γωνίες $\widehat{ADE}$ και $\widehat{EDG}$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$\widehat{ADE} + \widehat{EDG} = 180^\circ. \text{ Λόγω της (1) } \widehat{ADE} + 50^\circ = 180^\circ. \text{ Άρα } \widehat{ADE} = 130^\circ. \text{ Από το άθροισμα}$$

γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{G} = 180^\circ$ ή $90^\circ + \widehat{B} + 40^\circ =$

$$180^\circ \text{ ή } \widehat{B} = 50^\circ. \text{ Τελικά οι γωνίες του τετράπλευρου ADEB είναι:}$$

$$\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{B} = 50^\circ, \widehat{ADE} = 130^\circ \text{ και } \widehat{DEB} = 90^\circ.$$

75 Θέμα 4 - 13290

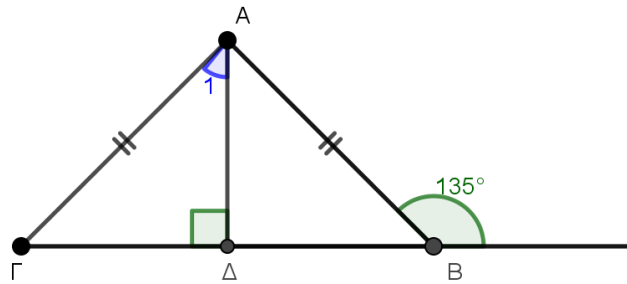
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\widehat{B_{εξ}} = 135^\circ$ και επιπλέον ισχύει $\widehat{B_{εξ}} + \widehat{B} = 180^\circ$, άρα $\widehat{B} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση του.

Έτσι, $\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = 45^\circ$. Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ, \text{ οπότε } \widehat{A} + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ, \text{ ή } \widehat{A} = 90^\circ.$$

β) Από την υπόθεση το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και από ερώτημα α) η γωνία $\widehat{A} = 90^\circ$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο κα ισοσκελές.

γ)



Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $AB \perp BG$ και η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή. Από την υπόθεση το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΔ είναι το ύψος προς τη βάση του, άρα το ΑΔ θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Συνεπώς $\widehat{A_1} = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ$.

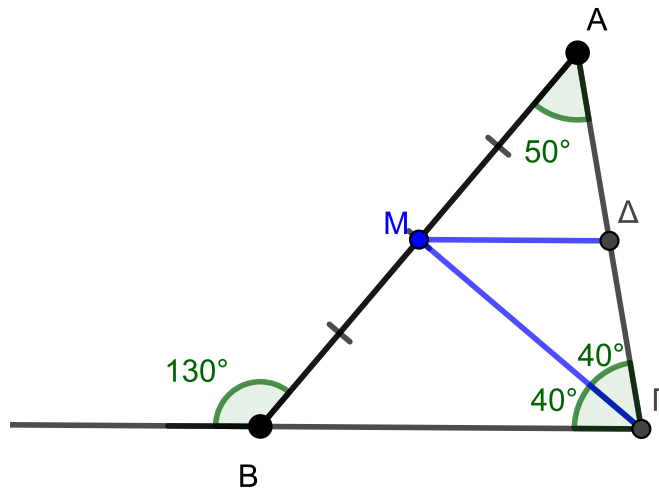
Για τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ γνωρίζουμε από το α) ερώτημα ότι είναι 45° . Οπότε :

- i. Το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μία ορθή γωνία άρα είναι ορθογώνιο.
- ii. Το τρίγωνο ΑΔΓ έχει τις δύο οξείες γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

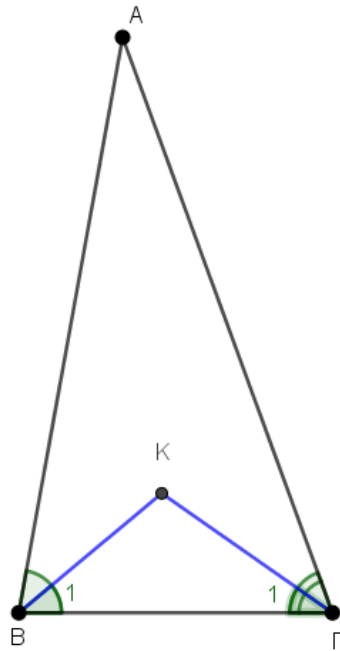
α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $\widehat{B}_{\varepsilon\chi} = 130^\circ$ και επειδή $\widehat{B}_{\varepsilon\chi} + \widehat{B} = 180^\circ$, έχουμε ότι $\widehat{B} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Δίνεται επιπλέον ότι $\widehat{A} = 50^\circ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $50^\circ + 50^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$, ή $\widehat{\Gamma} = 80^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ δείξαμε στο α) ερώτημα ότι $\widehat{A} = \widehat{B} = 50^\circ$. Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες, άρα είναι ισοσκελές. Στο ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, αφού είναι ίσες οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$, η βάση του ισοσκελούς είναι η πλευρά AB και οι ίσες πλευρές του είναι οι GA και GB .

γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB , φέρουμε $M\Delta$ παράλληλο στη $B\Gamma$ με Δ σημείο της $A\Gamma$.



- i. Από το β) ερώτημα το ΓAB είναι ισοσκελές τρίγωνο και ΓM είναι η διάμεσος προς τη βάση του AB . Η διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, οπότε $\widehat{B\Gamma M} = \widehat{M\Gamma\Delta} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$. Οι $\widehat{\Delta M\Gamma}$ και $\widehat{B\Gamma M}$ είναι εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Delta M\Gamma} = \widehat{B\Gamma M} = 40^\circ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta M\Gamma$ έχουμε: $\widehat{\Delta M\Gamma} + \widehat{M\Gamma\Delta} + \widehat{M\Delta\Gamma} = 180^\circ$, ή $40^\circ + 40^\circ + \widehat{M\Delta\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $\widehat{M\Delta\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
- ii. Το τρίγωνο $M\Gamma\Delta$, δείξαμε στο i) ότι, έχει δύο γωνίες του ίσες με 40° . Άρα το $M\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $\Delta M = \Delta\Gamma$.



α) i. Στο τρίγωνο ABΓ: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, άρα $\hat{A} + 80^\circ + 70^\circ = 180^\circ$,
επομένως $\hat{A} = 30^\circ$.

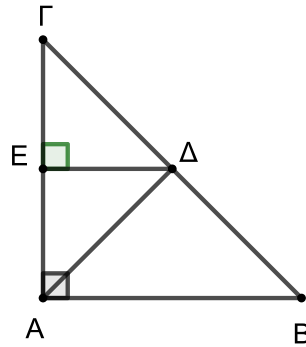
ii. $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$, γιατί η BK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

$\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$, γιατί η ΓK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο BΓK: $\hat{K} + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, άρα $\hat{K} = 180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$.

β) Αν το τρίγωνο BΚΓ είναι ισοσκελές με $BK = \Gamma K$, τότε οι γωνίες της βάσης BΓ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Επειδή όμως BK και ΓK είναι διχοτόμοι των γωνιών

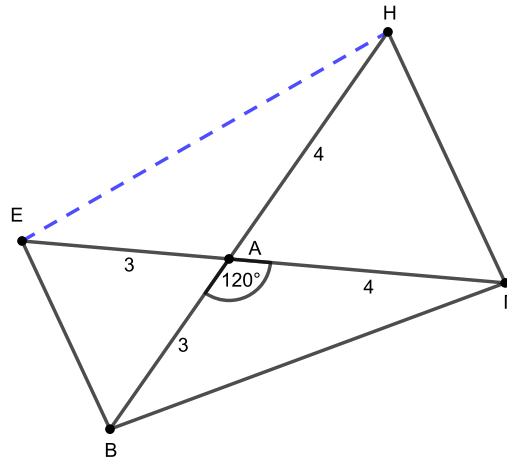
$\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, θα έχουμε $\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα, το ABΓ είναι ισοσκελές.



α) $DE \parallel AB$, από την υπόθεση και $AB \perp AG$ αφού $\hat{A} = 90^\circ$. Άρα η DE θα είναι κάθετη στην AG . Οπότε το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{DE}\Gamma = 90^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, για το άθροισμα των οξείων γωνιών του έχουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου θα ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $DE\Gamma$ η μία οξεία γωνία του $\hat{\Gamma}$ είναι 45° , οπότε επειδή $\hat{ED}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ$, επίσης ως άθροισμα οξείων γωνιών, τότε και $\hat{ED}\Gamma = 45^\circ$. Άρα και το $DE\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $DE = E\Gamma$.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι διάμεσος της πλευράς $B\Gamma$, επομένως θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Δηλαδή ισχύει ότι $\hat{GAD} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ = \hat{\Gamma}$. Το τρίγωνο $AD\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την AG . Το τμήμα DE είναι ύψος, αφού $DE \perp AG$, άρα είναι και διάμεσος. Συνεπώς το E είναι μέσο της AG .



α) Τα τρίγωνα ABE και AGH είναι ισοσκελή με βάσεις τις BE και GH αντίστοιχα, αφού από την υπόθεση $AH = 4 = AG$ και $AE = 3 = AB$. Για τη γωνία $\widehat{BAE}$ έχουμε:

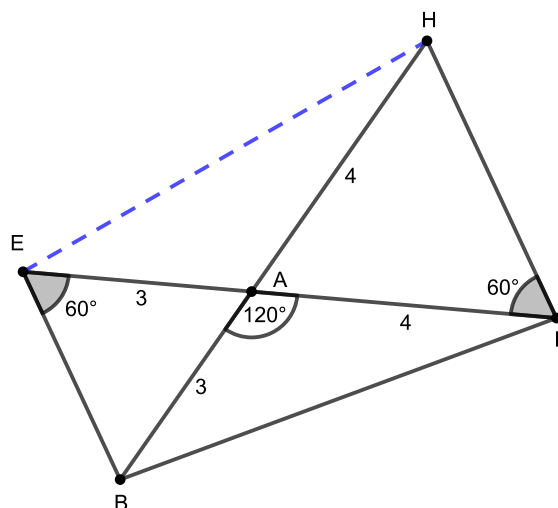
$\widehat{BAE} = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Ομοίως για τη γωνία $\widehat{GAH}$ έχουμε:

$\widehat{GAH} = 180^\circ - \widehat{GAB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ABE και AGH έχουν τη γωνία της κορυφής τους ίση με 60° , οπότε είναι τελικά ισόπλευρα.

β) Στα τρίγωνα ABΓ και AEH:

- $AB = AE = 3$, από την υπόθεση
- $AG = AH = 4$, από την υπόθεση
- $\widehat{A} = \widehat{EAH} = 120^\circ$ ως κατακορυφήν γωνίες

Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Π–Γ–Π.

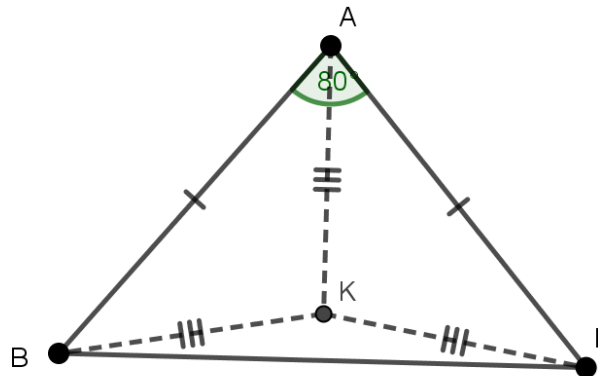


γ) $\widehat{BEA} = 60^\circ$ μία από τις γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου ABE. $\widehat{AGH} = 60^\circ$ μία από τις γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου AGH. Οι γωνίες όμως $\widehat{BEA}$ και $\widehat{AGH}$ είναι ίσες και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των τμημάτων BE και GH που τέμνονται από την ΓΕ. Άρα $BE \parallel GH$.

α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:

- ΚΑ κοινή πλευρά
- $BK = GK$, από υπόθεση
- $AB = AG$, διότι το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα, αφού έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες



β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{G}$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, οπότε ισχύει ότι: $\widehat{BAK} = \widehat{KAG} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

Επειδή $KB = KA$, το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές και οι γωνίες στη βάση του ΑΒ θα είναι ίσες. Δηλαδή $\widehat{ABK} = \widehat{BAK} = 40^\circ$ (1). Όμοια, επειδή $KA = KG$ το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές, και οι γωνίες στη βάση του ΑΓ θα είναι ίσες. Δηλαδή $\widehat{KGA} = \widehat{KAG} = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

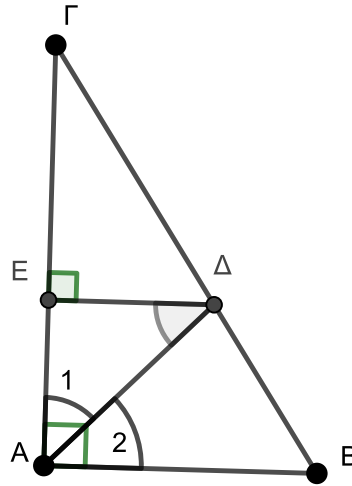
$$\widehat{AKB} + \widehat{ABK} + \widehat{BAK} = 180^\circ. \text{ Λόγω της (1) } \widehat{AKB} + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ, \text{ οπότε } \widehat{AKB} = 100^\circ \text{ (2)}$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΒΚΑ και ΓΚΑ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι $\widehat{AKB} = \widehat{AKG}$, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Έτσι λόγω της (2) έχουμε $\widehat{AKG} = 100^\circ$.

γ) Είναι $\widehat{BKG} + \widehat{AKB} + \widehat{AKG} = 360^\circ$. Με τη βοήθεια του ερωτήματος β) προκύπτει :

$$\widehat{BKG} + 100^\circ + 100^\circ = 360^\circ, \text{ δηλαδή } \widehat{BKG} + 200^\circ = 360^\circ \text{ και } \widehat{BKG} = 160^\circ.$$

α) Η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, αφού είναι $\hat{A} = 90^\circ$.
Οπότε, η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην ΕΔ. Άρα, το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο με
ορθή τη γωνία ΓΕΔ.



β) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της ορθής γωνίας $\hat{A}$, ισχύει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ$

Αφού είναι $\hat{A}_2 = 45^\circ$ τότε θα είναι και $\hat{ADE} = 45^\circ$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των
παραλλήλων ΕΔ και ΑΒ με τέμνουσα την ΑΔ.

γ) Έστω ότι η $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$ (1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Οπότε,
λόγω της σχέσης (1), έχουμε: $\hat{\Gamma} + 20^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$.

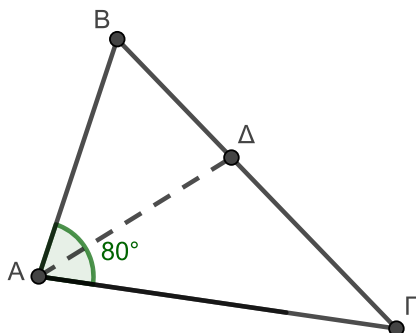
Τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ = 55^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{EDG}$ και $\hat{B}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ
με τέμνουσα την ΒΓ. Οπότε είναι ίσες. Άρα, $\hat{EDG} = \hat{B} = 55^\circ$.

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

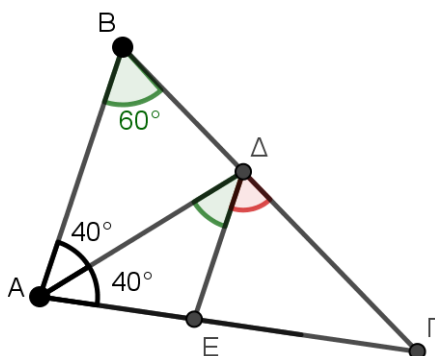
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ, \text{ οπότε } 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{\Gamma} = 80^\circ, \text{ δηλαδή } \hat{\Gamma} = 40^\circ.$$

$$\text{Άρα } \hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$



β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα ισχύει ότι $\hat{BAD} = \hat{DAG} = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$.

Φέρνουμε την ΔΕ // ΑΒ.



- i. $\hat{EDG} = \hat{B} = 60^\circ$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΔ. Ομοίως $\hat{DEG} = \hat{A} = 80^\circ$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΓ.
- ii. Είναι $\hat{EDA} = \hat{BAD} = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ. Επίσης έχουμε $\hat{ADG} = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΕΔ έχει $\hat{EDA} = \hat{DAG} = 40^\circ$, άρα είναι ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $AB = AG$, το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Εφόσον η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου ABG θα είναι $\widehat{DAG} = \widehat{BAD} = 30^\circ$.

β) Λόγω του (α) ερωτήματος η $\widehat{A} = 60^\circ$. Δηλαδή το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές και έχει μία γωνία του ίση με 60° , άρα τελικά το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Λόγω του (α) ερωτήματος η $\widehat{DAE} = 30^\circ$. Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση τη DE , άρα $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$.

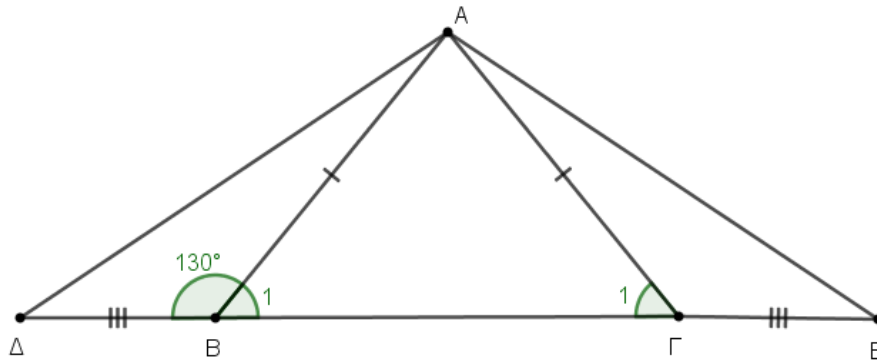
Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ADE έχουμε:

$$\widehat{DAG} + \widehat{DAE} + \widehat{AED} = 180^\circ \text{ ή } 30^\circ + 2 \cdot \widehat{ADE} = 180^\circ \text{ ή } 2 \cdot \widehat{ADE} = 150^\circ \text{ ή } \widehat{ADE} = 75^\circ.$$

Το AD είναι και ύψος του τριγώνου ABG οπότε,

$$\widehat{EDG} = \widehat{DAG} - \widehat{DAE} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

α) i.



$\widehat{B}_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, γιατί είναι παραπληρωματική της εξωτερικής γωνίας $\widehat{B}$.

$\widehat{\Gamma}_1 = 50^\circ$, αφού $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{B}_1$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{\Gamma}_1 = 180^\circ$, άρα $\widehat{A} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$.

ii. Τα τρίγωνα ABΔ και AΓΕ έχουν:

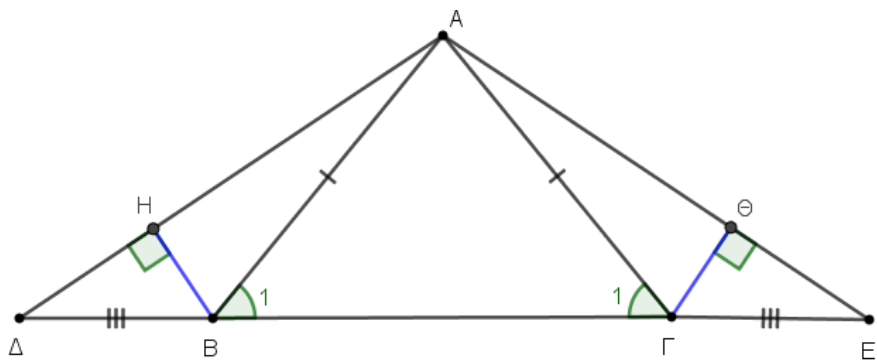
AB = AΓ από υπόθεση.

BD = ΓΕ από υπόθεση.

$\widehat{B}_{\text{εξωτ}} = \widehat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_1, \widehat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Επομένως είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Φέρουμε τις αποστάσεις των B και Γ από τις AD και AE, δηλαδή τις BH και ΓΘ αντίστοιχα.



Τα τρίγωνα ΔHB και ΕΘΓ έχουν:

ΔB = ΓΕ από υπόθεση.

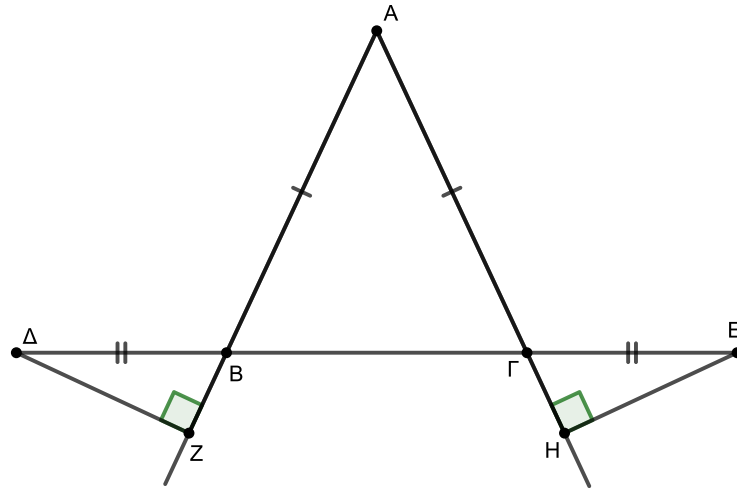
$\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma E}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και AΓ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων ABΔ και AΓΕ του α) ερωτήματος.

$\widehat{H\Delta B} = \widehat{\Theta\Gamma E} = 90^\circ$, επειδή οι BH και ΓΘ είναι κάθετες στις AD και AE αντίστοιχα.

Επομένως είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια.

Άρα $BH = ΓΘ$, ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{A\Delta B}$, $\widehat{A\tilde{\Gamma}}$ αντίστοιχα.

α)

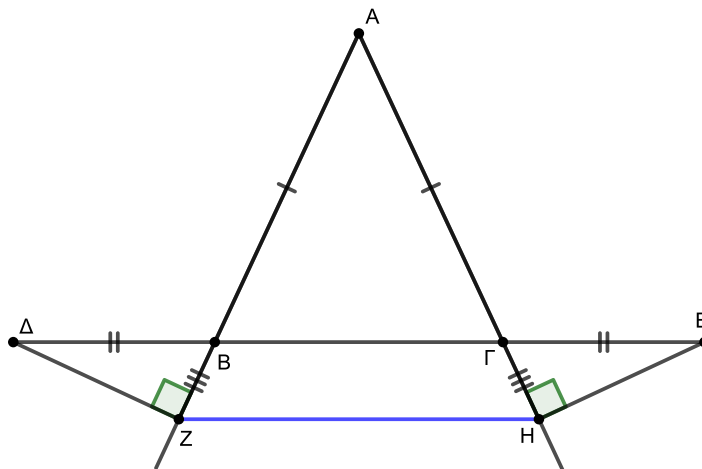


i. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΓΗ έχουν:

- $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, αφού $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$
- $B\Delta = \Gamma E$, από υπόθεση
- $\Delta\hat{B}Z = E\hat{\Gamma}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γωνίες της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες οξείες γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{E}$. Επομένως οι πλευρές που είναι απέναντι από τις γωνίες αυτές, θα είναι ίσες, δηλαδή $BZ = \Gamma H$.

ii.



Επειδή $AB = AG$ (υπόθεση) και $BZ = ΓH$ (από το i) ερώτημα), τότε $AB + BZ = AG + ΓH$, δηλαδή $AZ = AH$ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων. Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με βάση τη ZH , είναι $\hat{Z} = \hat{H}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZH έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^\circ, \text{ ή } 50^\circ + 2\hat{Z} = 180^\circ, \text{ ή } 2\hat{Z} = 130^\circ, \text{ οπότε } \hat{Z} = 65^\circ = \hat{H}.$$

ΛΥΣΗ

α) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ, τότε θα έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΒΓ ίσες, δηλαδή θα είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

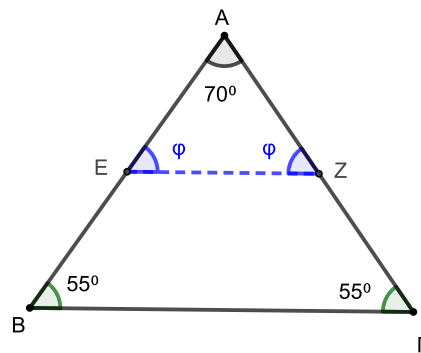
Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

Αφού είναι $\widehat{A} = 70^\circ$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε έχουμε:

$$70^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{B} = 180^\circ - 70^\circ \text{ ή } 2\widehat{B} = 110^\circ, \text{ άρα } \widehat{B} = 55^\circ.$$

Αφού είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε θα είναι και $\widehat{\Gamma} = 55^\circ$. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

β) Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.



i. Αφού είναι Ε μέσο της πλευράς ΑΒ και Ζ μέσο της πλευράς ΑΓ, τότε θα είναι

$$AE = EB = \frac{AB}{2} \text{ και } AZ = Z\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} \text{ αντίστοιχα. Οπότε θα ισχύει } AE = EB = AZ = Z\Gamma \text{ ως}$$

μισά των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (δεδομένο).

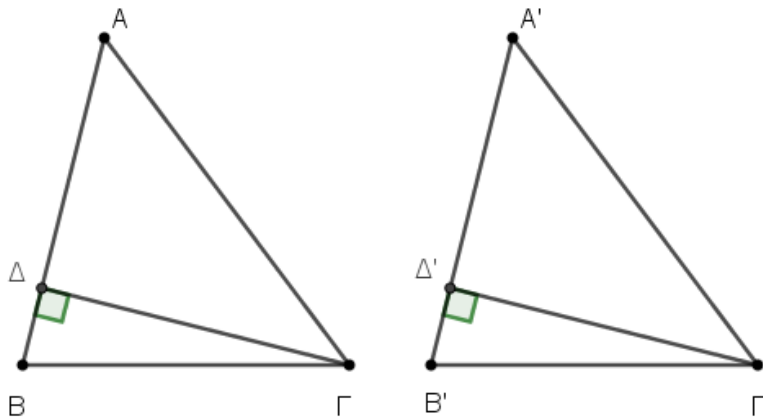
Επομένως, το τρίγωνο ΑΕΖ θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΕ και ΑΖ.

Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $\widehat{A} = 70^\circ$, οπότε οι γωνίες της βάσης του ΕΖ είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AEZ} = \widehat{AZE} = \phi$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ ισχύει ότι $\widehat{A} + \phi + \phi = 180^\circ$, οπότε θα έχουμε $70^\circ + 2\phi = 180^\circ$ ή $2\phi = 180^\circ - 70^\circ$ ή $2\phi = 110^\circ$, άρα $\phi = 55^\circ$, οπότε $\widehat{AEZ} = \widehat{AZE} = 55^\circ$.

ii. Αφού είναι $\widehat{B} = 55^\circ$ (από α) ερώτημα) και $\widehat{AEZ} = 55^\circ$ (από το β) i. ερώτημα), τότε είναι $EZ \parallel B\Gamma$ γιατί τεμνόμενα από την ΑΒ σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$. Φέρνουμε τα ύψη $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$.



α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B'\Delta'\Gamma'$ έχουν:

$\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$, από υπόθεση.

$\widehat{B} = \widehat{B'}$, από υπόθεση.

Είναι ορθογώνια, επειδή οι $\Gamma\Delta$ και $\Gamma'\Delta'$ είναι κάθετες στις AB και $A'B'$ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B'\Delta'\Gamma'$ είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν μία κάθετη πλευρά και την απέναντι σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή $B\Gamma = B'\Gamma'$.

β) i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ.$$

Στο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι:

$$\widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{\Gamma'} = 180^\circ.$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\widehat{A} = \widehat{A'}$ και $\widehat{B} = \widehat{B'}$, επομένως θα έχουν και τις άλλες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ (1).

ii. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$B\Gamma = B'\Gamma'$, από το α) ερώτημα.

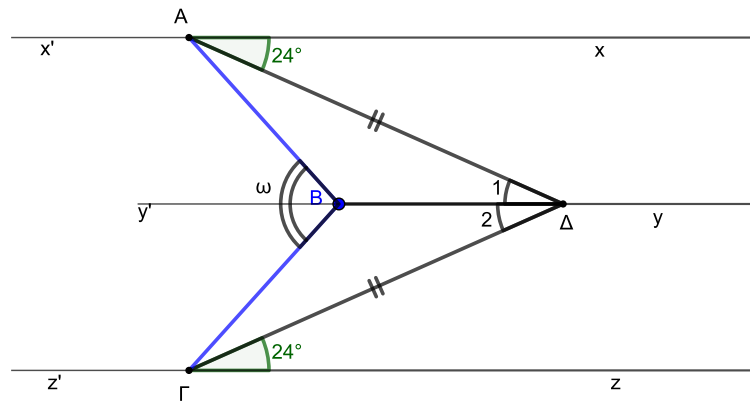
$\widehat{B} = \widehat{B'}$, από υπόθεση

$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, από το (1).

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

γ) Αν το Δ είναι μέσο της AB , τότε η $\Gamma\Delta$ εκτός από ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές με βάση την AB , αφού η διάμεσος του $\Gamma\Delta$ είναι και ύψος.



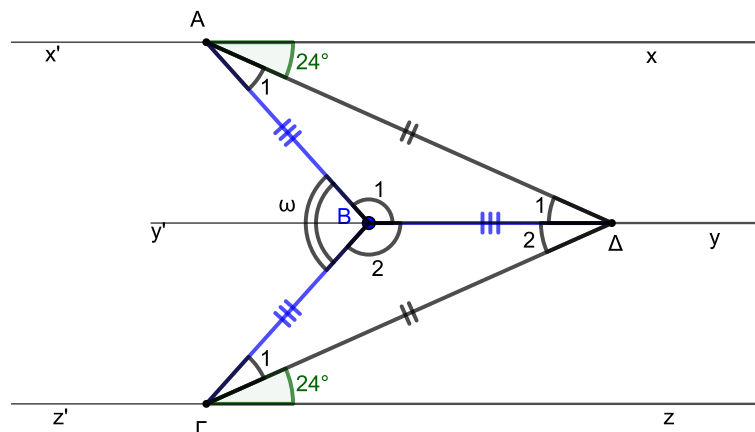
α) Είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{x\Delta\Delta} = 24^\circ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $x'x$ και $y'y$ που τέμνονται από το τμήμα $A\Delta$. Ομοίως $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{z\Gamma\Delta} = 24^\circ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $y'y$ και $z'z$ που τέμνονται από το τμήμα $\Gamma\Delta$.

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:

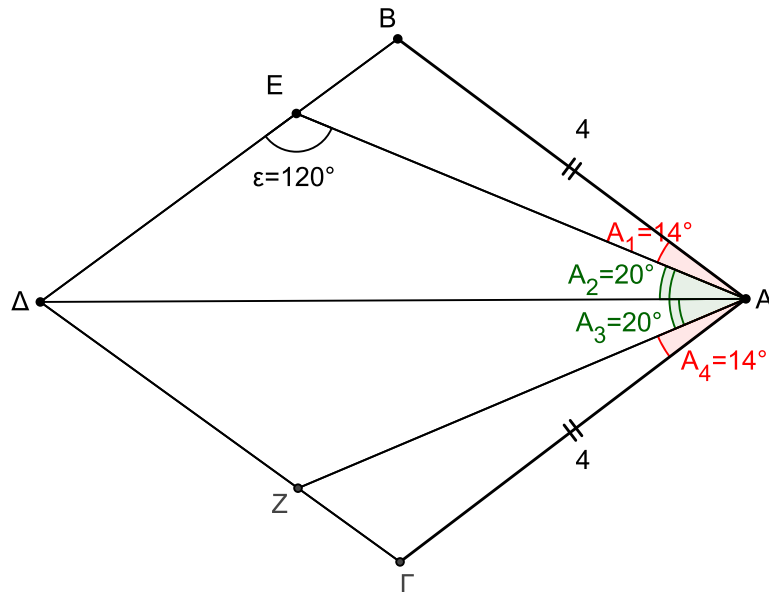
- $A\Delta = \Gamma\Delta$, από την υπόθεση
- $B\Delta$ κοινή πλευρά
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 24^\circ$

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

β)



- Αν τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ισοσκελή με βάσεις $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, τότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1 = 24^\circ$ και $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Gamma}_1 = 24^\circ$. Δηλαδή οι ίσες γωνίες των βάσεών τους είναι ίσες με 24° . Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα από το α) ερώτημα, θα είναι ίσες και οι γωνίες των κορυφών τους, δηλαδή $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (1). Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\widehat{B}_1 + \widehat{\Delta}_1 + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ ή $\widehat{B}_1 + 2 \cdot 24^\circ = 180^\circ$, οπότε $\widehat{B}_1 = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$. Λόγω της (1) θα είναι και $\widehat{B}_2 = 132^\circ$.
- Για τη γωνία ω έχουμε: $\omega = 360^\circ - \widehat{B}_1 - \widehat{B}_2 = 360^\circ - 2 \cdot 132^\circ = 96^\circ$.



α) Στο σχήμα έχουμε: $\widehat{Β\hat{A}\Delta} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 14^\circ + 20^\circ = 34^\circ$ (1) και

$\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{A}_4 + \widehat{A}_3 = 14^\circ + 20^\circ = 34^\circ$ (2)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ = 4$, από υπόθεση
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{Β\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$, από (1) και (2)

Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές αντίστοιχα ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ του i. ερωτήματος, οι γωνίες $\widehat{Β\hat{D}A}$ και $\widehat{\Gamma\hat{D}A}$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ, τα οποία έχουν:

- $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = 20^\circ$, από υπόθεση
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{Ε\hat{D}A} = \widehat{Ζ\hat{D}A}$ αφού $\widehat{Β\hat{D}A} = \widehat{\Gamma\hat{D}A}$, από το ii. του α) ερωτήματος.

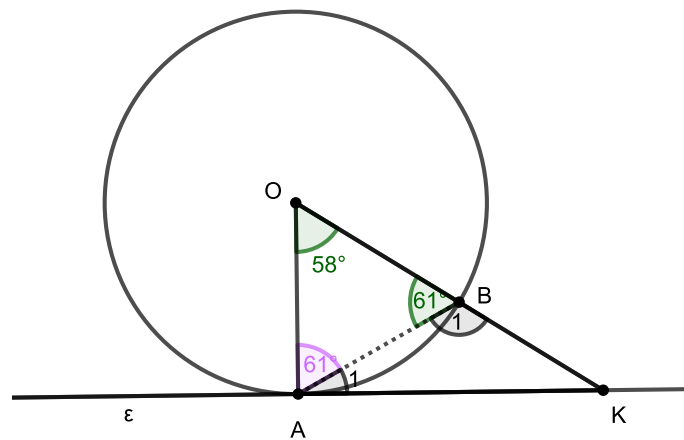
Τα τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή, ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ. Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_2$ και $\widehat{A}_3$, δηλαδή $ΔΕ = ΔΖ$.

γ) Αν $\widehat{\epsilon} = 120^\circ$ τότε, επειδή η γωνία $\widehat{\epsilon}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΒΕ, θα ισχύει ότι $\widehat{\epsilon} = \widehat{B} + \widehat{A}_1$. Δηλαδή $120^\circ = \widehat{B} + 14^\circ$, άρα $\widehat{B} = 120^\circ - 14^\circ = 106^\circ$.

α)

- i. Στο τρίγωνο AOB οι δύο πλευρές του, OA και OB είναι ίσες ως ακτίνες του κύκλου, οπότε το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές. Η γωνία της κορυφής του ισοσκελούς είναι 58° οπότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου AOB έχουμε : $\widehat{OBA} + \widehat{OAB} + 58^\circ = 180^\circ$ (1). Οι γωνίες $\widehat{OBA}$ και $\widehat{OAB}$ είναι ίσες, αφού είναι οι προσκείμενες στη βάση AB του ισοσκελούς τριγώνου AOB. Έτσι η (1) γίνεται $2 \widehat{OBA} + 58^\circ = 180^\circ$, οπότε $2 \widehat{OBA} = 122^\circ$, ή $\widehat{OBA} = 61^\circ$.

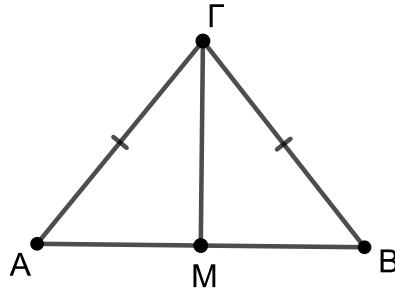
ii.



Στο τρίγωνο ABK η $\widehat{B}_1$ είναι παραπληρωματική γωνία της $\widehat{OBA}$, οπότε $\widehat{B}_1 = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$. Από την κατασκευή η ευθεία ϵ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο A, οπότε η ακτίνα OA είναι κάθετη στην ϵ . Άρα $\widehat{A}_1 = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABK έχουμε $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{K} = 180^\circ$, οπότε $119^\circ + 29^\circ + \widehat{K} = 180^\circ$, ή $\widehat{K} = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.

β) Ζητείται η χορδή AB να γίνει ίση με την ακτίνα του κύκλου ρ . Τότε οι τρεις πλευρές του τριγώνου AOB θα είναι ίσες με την ακτίνα ρ και το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο. Σε αυτή την περίπτωση κάθε γωνία του θα είναι 60° . Δηλαδή η γωνία $\widehat{O}$ θα έπρεπε να είχε σχεδιαστεί ίση με 60° ώστε η χορδή AB να είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου.



α) Η ΓΜ είναι διάμεσος της πλευράς ΑΒ του ΑΒΓ άρα, $AB = 2 \cdot BM = 6$.

β) Το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, λόγω της υπόθεσης $ΑΓ = ΒΓ$. Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς, δηλαδή της $\widehat{ΑΓΒ}$, γιατί είναι διάμεσος της βάσης του.

Επιπλέον, έχουμε ότι $\widehat{ΑΓΜ} = 33^\circ$.

Άρα, $\widehat{ΑΓΒ} = 2 \cdot \widehat{ΑΓΜ} = 2 \cdot 33^\circ = 66^\circ$.

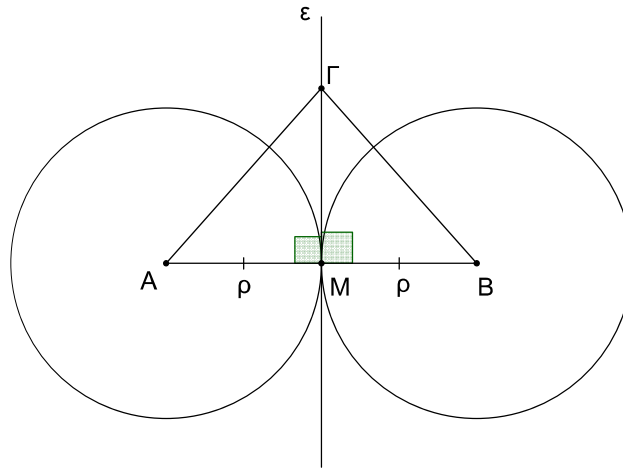
Οι $\widehat{ΓΑΒ}$ και $\widehat{ΓΒΑ}$ είναι ίσες ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς ΑΒΓ. Επειδή το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓ είναι ίσο με 180° έχουμε ότι:

$$\widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΑΒ} = \frac{180^\circ - \widehat{ΑΓΒ}}{2} \text{ ή } \widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΑΒ} = \frac{180^\circ - 66^\circ}{2} \text{ ή } \widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΑΒ} = 57^\circ.$$

γ) Εφόσον γνωρίζουμε ότι $ΑΓ = 6$, τότε $ΒΓ = 6$, γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΒΓ$.

Επίσης, από το α) ερώτημα έχουμε ότι $AB = 6$.

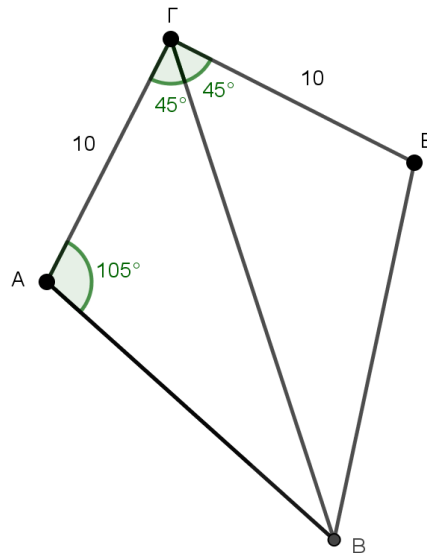
Συνεπώς, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και άρα έχει όλες του τις γωνίες ίσες. Η κάθε μια είναι ίση με 60° .



α) Το σημείο επαφής δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά ανήκει στη διάκεντρό τους. Άρα η $\widehat{AMB}$ είναι ευθεία γωνία, οπότε θα είναι $\widehat{AMB} = 180^\circ$.

β) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην διάκεντρο AB . Επιπλέον, το M είναι το μέσο της AB , αφού $AM = MB = \rho$. Άρα η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB . Το σημείο Γ που ανήκει στην ε θα ισαπέχει από τα άκρα του AB , δηλαδή $A\Gamma = B\Gamma$.

γ) Τα σημεία A, M, B είναι συνευθειακά, αφού από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{AMB} = 180^\circ$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , γιατί $A\Gamma = B\Gamma$. Για να είναι η $A\Gamma$ κάθετη στη $B\Gamma$, θα πρέπει το τρίγωνο $AB\Gamma$ εκτός από ισοσκελές να είναι και ορθογώνιο με $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$. Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές και ίσες με 45° η κάθε μία. Άρα $\widehat{M\Gamma A} = 45^\circ$.



α) Στα τρίγωνα ΑΓΒ και ΕΓΒ:

- $GA = GE = 10$
- $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{E\Gamma B} = 45^\circ$
- $GB = GB$ κοινή πλευρά.

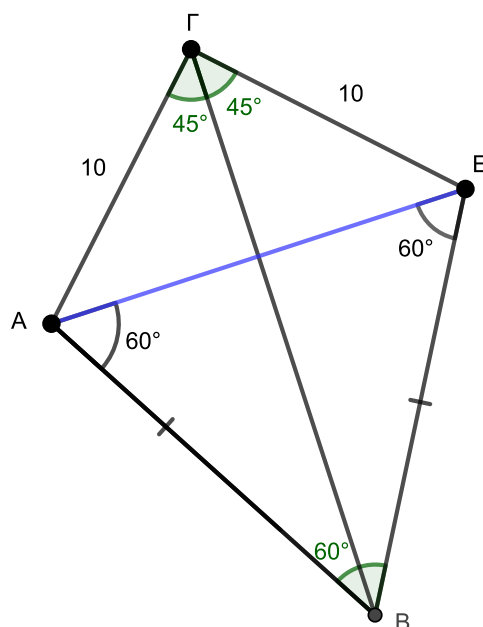
Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος α) προκύπτει ότι, οι γωνίες $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{E\Gamma B}$ είναι ίσες, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΒΓ των ίσων τριγώνων ΑΓΒ και ΕΓΒ. Άρα $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{E\Gamma B} = 45^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $\widehat{A\Gamma B} + \widehat{A} + \widehat{A\Gamma B} = 180^\circ$, οπότε $45^\circ + 105^\circ + \widehat{A\Gamma B} = 180^\circ$, συνεπώς $\widehat{A\Gamma B} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΒ και ΕΓΒ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι, $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{E\Gamma B} = 30^\circ$, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΑ και ΓΕ.

Οπότε $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{E\Gamma B} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.



γ) Από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος α) προκύπτει ότι, οι πλευρές AB και BE είναι ίσες, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A\Gamma B}$ και $\widehat{E\Gamma B}$ αντίστοιχα. Οπότε, το ABE τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την AE. Η γωνία της κορυφής του είναι η $\widehat{A\Gamma E}$ που υπολογίσαμε στο ερώτημα β) και είναι ίση με 60° . Για καθεμία από τις γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ABE έχουμε:

$$\widehat{BAE} = \widehat{AEB} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Τελικά, όλες οι γωνίες του τριγώνου ABE είναι ίσες με 60° , οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.

α) Τα τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle ΓΕΒ$ έχουν:

- $\hat{\Delta} = \hat{Ε} = 90^\circ$, γιατί τα $B\Delta$ και $\Gamma Ε$ είναι ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$.
- $B\Gamma = B\Gamma$, κοινή πλευρά.
- $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{B}Ε$, γιατί οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle ΓΕΒ$ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β) Αφού τα τρίγωνα $\triangle B\Delta\Gamma$ και $\triangle ΓΕΒ$ είναι ίσα, θα είναι $B\Delta = \Gamma Ε$ ως ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta, \hat{\Gamma}\hat{B}Ε$ αντίστοιχα.

γ) Το σημείο B ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$, γιατί το τμήμα $B\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα το σημείο B ισαπέχει από τα άκρα του $A\Gamma$, δηλαδή $AB = B\Gamma$ (1).

Το σημείο Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB , γιατί το τμήμα $\Gamma Ε$ είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα το σημείο Γ ισαπέχει από τα άκρα του AB , δηλαδή $A\Gamma = B\Gamma$ (2).

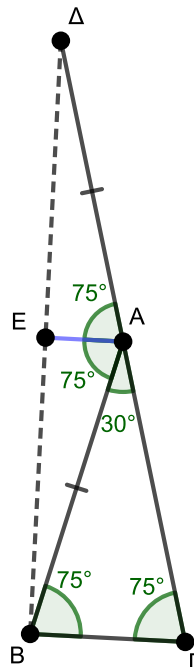
Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές από την υπόθεση με $AB = A\Gamma$. Οπότε, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε :

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{A} = 180^\circ$, ή $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} + 30^\circ = 180^\circ$, ή $2\widehat{\Gamma} + 30^\circ = 180^\circ$ και $2\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ και τελικά $\widehat{\Gamma} = 75^\circ$. Επειδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ προκύπτει ότι και $\widehat{B} = 75^\circ$.

β) «Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το τμήμα BA είναι **διάμεσος** που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$ ». Από την κατασκευή το τμήμα AD είναι ίσο με την πλευρά AB του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Οπότε το AD είναι ίσο και με το $A\Gamma$. Δηλαδή το σημείο A χωρίζει το τμήμα $\Gamma\Delta$ σε δύο ίσα τμήματα, οπότε το σημείο A είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$. Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το ευθύγραμμο τμήμα BA ενώνει την κορυφή B του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς $\Gamma\Delta$, άρα το BA είναι διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Gamma\Delta$.

γ)



- ι. Το τμήμα AE έχει κατασκευαστεί παράλληλο στο τμήμα $B\Gamma$. Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{E\Delta D}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Έτσι, $\widehat{E\Delta D} = \widehat{\Gamma} = 75^\circ$. Οι γωνίες $\widehat{BAE}$ και $\widehat{A\Gamma B}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB .

Έτσι, $\widehat{BAE} = \widehat{A\Gamma B} = 75^\circ$.

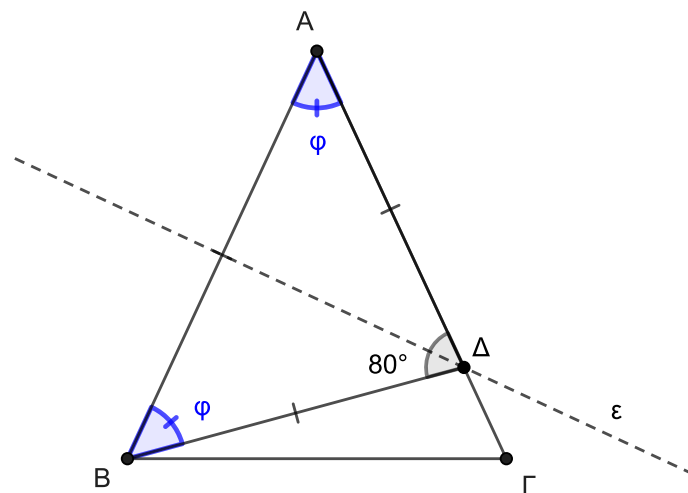
- ii. Στο τρίγωνο $ΒΑΔ$ οι πλευρές του $ΑΒ$ και $ΑΔ$ έχουν κατασκευαστεί ίσες. Οπότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές με βάση τη $ΔΒ$. Στο ερώτημα i) υπολογίσαμε τις γωνίες $\widehat{ΒΑΕ}$ και $\widehat{ΕΑΔ}$ και έχει προκύψει ότι $\widehat{ΒΑΕ} = \widehat{ΕΑΔ} = 75^\circ$. Η $ΑΕ$ είναι επομένως η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου $ΒΑΔ$. Συνεπώς το $ΑΕ$ είναι και ύψος προς τη βάση του ισοσκελούς, δηλαδή το $ΑΕ$ είναι κάθετο στο τμήμα $ΔΒ$.

ΛΥΣΗ

α)

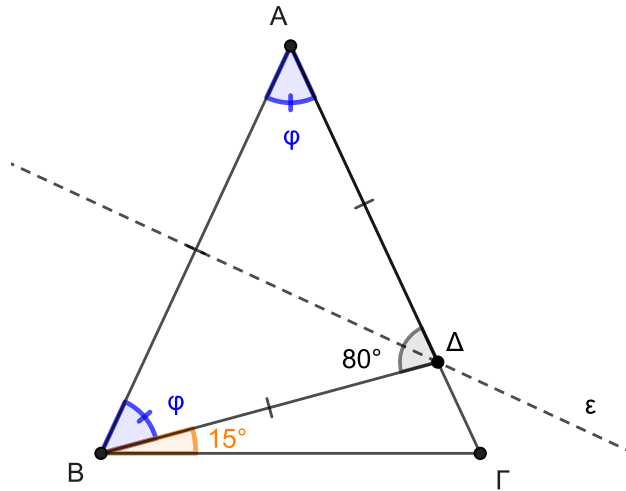
i. Αφού η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος της πλευράς AB του τριγώνου ABΓ και το σημείο Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε), τότε το Δ θα ισαπέχει από τα άκρα A και B του τμήματος AB, δηλαδή θα είναι $DA = DB$. Άρα το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές με $DA = DB$.

ii. Αφού το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές με $DA = DB$ (από α)i. ερώτημα), τότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του AB, δηλαδή $\hat{A} = \hat{AB}\Delta = \hat{\varphi}$. Για τις γωνίες του τριγώνου AΔB ισχύει ότι $\hat{A}\hat{D}\hat{B} + \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 180^\circ$. Επειδή είναι $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = 80^\circ$ από την υπόθεση, έχουμε $80^\circ + 2\hat{\varphi} = 180^\circ$ ή $2\hat{\varphi} = 100^\circ$, άρα $\hat{\varphi} = 50^\circ$. Συνεπώς είναι $\hat{A} = 50^\circ$.



β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο AΔB είναι ισοσκελές με

$\hat{A} = \hat{AB}\Delta = \hat{\varphi} = 50^\circ$ και επειδή είναι $\hat{DB}\hat{\Gamma} = 15^\circ$ από την υπόθεση, τότε θα είναι $\hat{AB}\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} + \hat{DB}\hat{\Gamma} = 50^\circ + 15^\circ = 65^\circ$.



Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ$ και επειδή είναι $\widehat{A\Delta\Gamma} = 65^\circ$ και $\widehat{A} = 50^\circ$ από α) ii. ερώτημα, τότε είναι $50^\circ + \widehat{\Gamma} + 65^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - 65^\circ - 50^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 65^\circ$.

Επομένως, το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο γωνίες ίσες, τις $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 65^\circ$.

ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού είναι $\Delta\Gamma = \Delta B$ από δεδομένα, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ θα είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$. Οπότε θα είναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη $B\Gamma$.

ii. Αφού η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Delta}B$ θα είναι $\widehat{\Delta}_1 = \frac{A\widehat{\Delta}B}{2}$ (2). Η γωνία $A\widehat{\Delta}B$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του. Δηλαδή θα ισχύει

$$A\widehat{\Delta}B = \widehat{B}_1 + \widehat{\Gamma} \text{ και επειδή είναι } \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma} \text{ (από σχέση (1)) θα είναι } A\widehat{\Delta}B = 2\widehat{\Gamma} \text{ (3)}$$

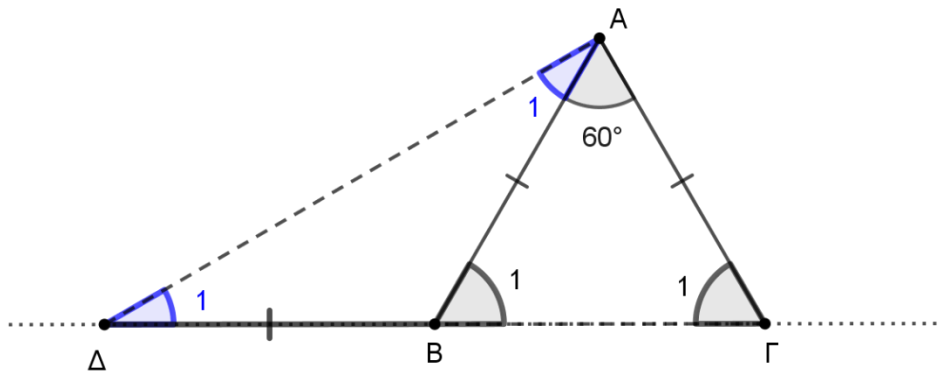
$$\text{Άρα, η σχέση (2) γίνεται } \widehat{\Delta}_1 = \frac{2\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma} \text{ (4).}$$

iii. Οι ΔE και ΓB θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την $B\Delta$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_1$ ίσες (αφού $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma}$ από σχέση (4) και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}$ από τη σχέση (1)). Οπότε η διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Delta}B$ είναι παράλληλη στο τμήμα $B\Gamma$.

β) Έχουμε ότι $A\widehat{\Delta}B = 2\widehat{\Gamma}$ (από σχέση (3)), οπότε θα είναι $70^\circ = 2\widehat{\Gamma}$, άρα $\widehat{\Gamma} = 35^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) οι γωνίες $A\widehat{B}\Gamma$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι οξείες, οπότε θα είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $A\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^\circ$. Επομένως θα είναι $A\widehat{B}\Gamma + 35^\circ = 90^\circ$, άρα $A\widehat{B}\Gamma = 55^\circ$.

ΛΥΣΗ



α) Αφού είναι $AB = AG$, τότε το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με βάση $BΓ$, οπότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $BΓ$, δηλαδή $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $ABΓ$ ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{B}_1 + \widehat{\Gamma}_1 = 180^\circ$ με $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, οπότε θα έχουμε $60^\circ + 2\widehat{B}_1 = 180^\circ$ ή $2\widehat{B}_1 = 180^\circ - 60^\circ$ ή $2\widehat{B}_1 = 120^\circ$ ή $\widehat{B}_1 = 60^\circ$. Συνεπώς, $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 60^\circ$.

Η γωνία $\widehat{A\hat{B}\Delta}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{B}_1$, οπότε θα ισχύει $\widehat{A\hat{B}\Delta} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ με $\widehat{B}_1 = 60^\circ$. Επομένως θα είναι $\widehat{A\hat{B}\Delta} + 60^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 180^\circ - 60^\circ$, άρα $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 120^\circ$.

β) Αφού είναι $BD = BA$, τότε το τρίγωνο $ABΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΔA$, οπότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $ΔA$, δηλαδή $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $ABΔ$ ισχύει ότι $\widehat{A\hat{B}\Delta} + \widehat{\Delta}_1 + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ με $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 120^\circ$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{A}_1$. Οπότε θα έχουμε $120^\circ + 2\widehat{A}_1 = 180^\circ$ ή $2\widehat{A}_1 = 180^\circ - 120^\circ$ ή $2\widehat{A}_1 = 60^\circ$ ή $\widehat{A}_1 = 30^\circ$.

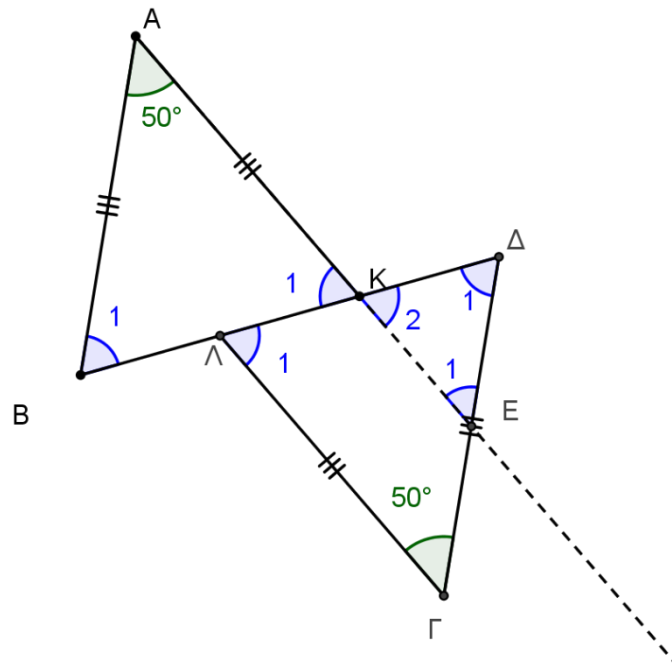
Στο τρίγωνο $ΔAΓ$ είναι $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{A}_1 + \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Άρα το τρίγωνο $ΔAΓ$ είναι ορθογώνιο.

γ) Για το τρίγωνο $ABΓ$ έχουμε ότι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ (από δεδομένα) και $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 60^\circ$ από το α) ερώτημα, οπότε θα είναι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισόπλευρο, δηλαδή θα είναι $AB = AG = BΓ$ (1).

Επίσης έχουμε $BD = AB$ (2) από τα δεδομένα.

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα έχουμε $BD = BΓ$, οπότε το B θα είναι μέσο του $ΔΓ$. Άρα το τμήμα AB θα είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $ΔΓ$ του τριγώνου $ΔAΓ$.

ΛΥΣΗ



α) Επειδή τα τρίγωνα ABK και ΓΔΛ είναι ίσα με $AB = ΓΔ = AK = ΓΛ$, τότε θα είναι

$\hat{K}_1 = \hat{L}_1 = \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών AB, AK, ΓΔ και ΓΛ αντίστοιχα.

Οπότε θα είναι $AB \parallel ΔΓ$ γιατί τεμνόμενες από την ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{D}_1$ ίσες (από σχέση (1)).

β) Στο τρίγωνο ΓΔΛ έχουμε ότι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες και $\hat{K}_1 = \hat{D}_1$ από τη σχέση (1), άρα θα είναι $\hat{K}_2 = \hat{D}_1$.

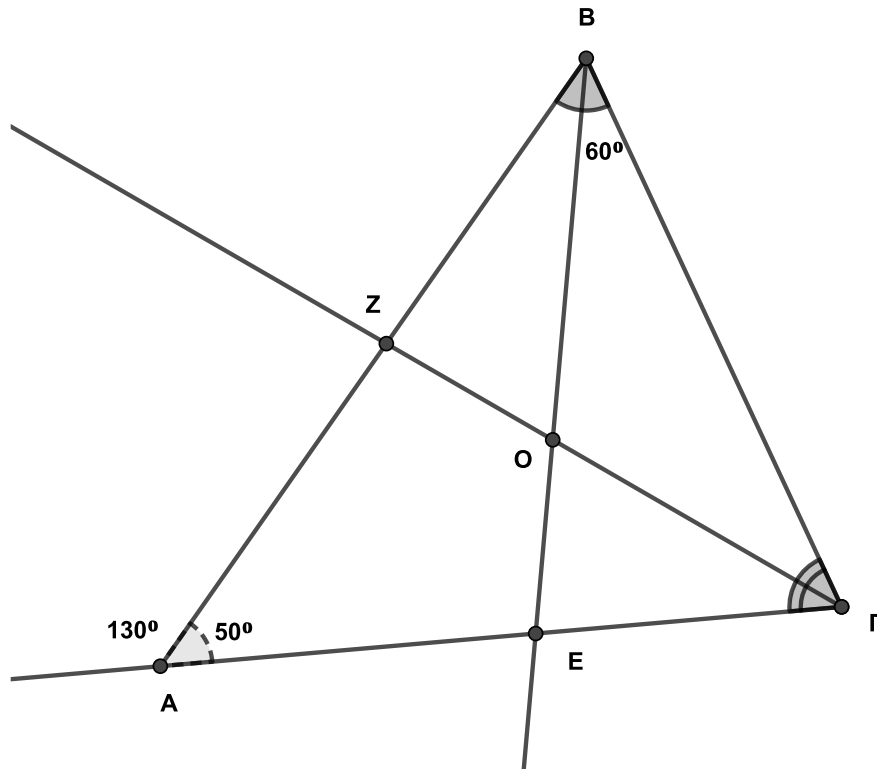
Οπότε το τρίγωνο ΚΔΕ θα είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο γωνίες ίσες.

γ) Αν το τρίγωνο ΚΔΕ ήταν ισόπλευρο, τότε κάθε του γωνία θα ήταν 60° , δηλαδή

$\hat{K}_2 = \hat{D}_1 = \hat{E}_1 = 60^\circ$ (2).

Αν είναι $\hat{E}_1 = 60^\circ$, τότε επίσης θα είναι $\hat{A} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων AB και ΔΓ του α) ερωτήματος με τέμνουσα την ΑΕ. Οπότε, με βάση τα δεδομένα, θα είναι και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Συνεπώς, αν οι ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ των δεδομένων είναι 60° , τότε το τρίγωνο ΚΔΕ θα είναι ισόπλευρο.



α) Οι γωνίες $\widehat{A}_{εξ}$ και $\widehat{A}$ είναι παραπληρωματικές άρα: $\widehat{A}_{εξ} + \widehat{A} = 180^\circ$ ή $130^\circ + \widehat{A} = 180^\circ$ ή $\widehat{A} = 50^\circ$.

Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $50^\circ + 60^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 70^\circ$.

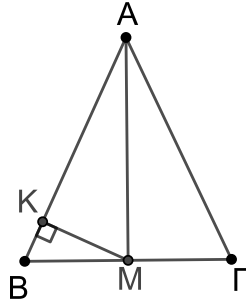
β) Η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου ABΓ άρα:

$$\widehat{ABE} = \widehat{EB\Gamma} = \frac{\widehat{AB\Gamma}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ (1).$$

Η ΓZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ άρα:

$$\widehat{A\Gamma Z} = \widehat{Z\Gamma B} = \frac{\widehat{A\Gamma B}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ (2).$$

Στο τρίγωνο BΓO έχουμε: $\widehat{O\Gamma B} + \widehat{B\Gamma O} + \widehat{O\Gamma B} = 180^\circ$ ή $30^\circ + \widehat{B\Gamma O} + 35^\circ = 180^\circ$ ή $\widehat{B\Gamma O} = 115^\circ$



α) Το τρίγωνο KMB είναι ορθογώνιο με $\widehat{K} = 90^\circ$ ($MK \perp AB$). Άρα η γωνία $\widehat{B\hat{M}K}$ και η γωνία $\widehat{B}$ του ισοσκελούς ABΓ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου.

β) Στην περίπτωση που $\widehat{B\hat{M}K} = 20^\circ$, από το α) ερώτημα είναι $\widehat{B} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

Επίσης, στο ισοσκελές ABΓ, η AM είναι διάμεσος, άρα και ύψος της BG. Επομένως, το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\widehat{AMB}$, άρα οι οξείες γωνίες του, $\widehat{B\hat{A}M}$ και $\widehat{B}$, είναι συμπληρωματικές.

Δηλαδή $\widehat{B\hat{A}M} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

γ) Η γωνία $\widehat{B\hat{A}M}$ του τριγώνου ABM είναι ίση με τη γωνία $\widehat{B\hat{M}K}$.

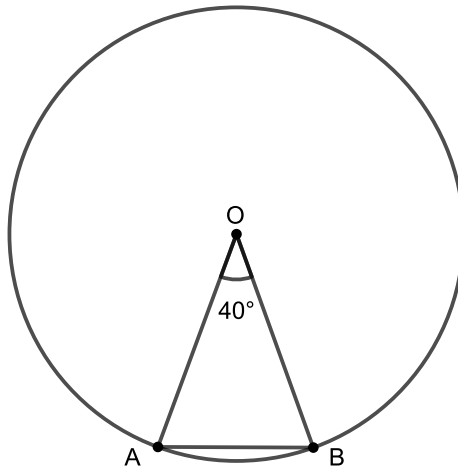
Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό ως εξής:

Όπως και στο β) ερώτημα, η AM είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος της βάσης του τριγώνου ABΓ, γιατί το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABM ισχύει ότι $\widehat{B\hat{A}M} = 90^\circ - \widehat{B}$, δηλαδή η $\widehat{B\hat{A}M}$ είναι συμπληρωματική της $\widehat{B}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KMB ισχύει ότι $\widehat{B\hat{M}K} = 90^\circ - \widehat{B}$, γιατί όπως έχουμε αποδείξει και στο ερώτημα α) η γωνία $\widehat{B\hat{M}K}$ είναι συμπληρωματική της $\widehat{B}$.

Άρα οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}M}$ και $\widehat{B\hat{M}K}$ είναι ίσες με $90^\circ - \widehat{B}$, άρα και ίσες μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε σημεία A και B ώστε $\widehat{AOB} = 40^\circ$.



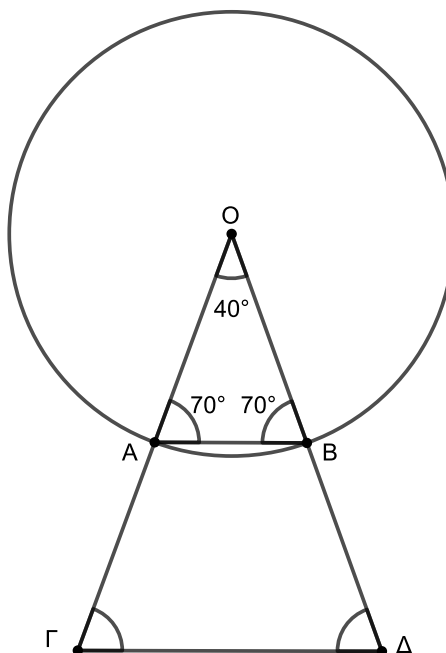
α) Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές OA και OB είναι ίσες με την ακτίνα R . Επομένως, οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση AB .

Στο τρίγωνο OAB ισχύει:

$$\widehat{O} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2\widehat{A} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{A} = 140^\circ.$$

Άρα, $\widehat{A} = 70^\circ$ και $\widehat{B} = 70^\circ$.

β) Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$.



i. Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R$.

Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Οπότε, οι γωνίες $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Ο\hat{\Gamma}\Delta = Ο\hat{\Delta}\Gamma$.

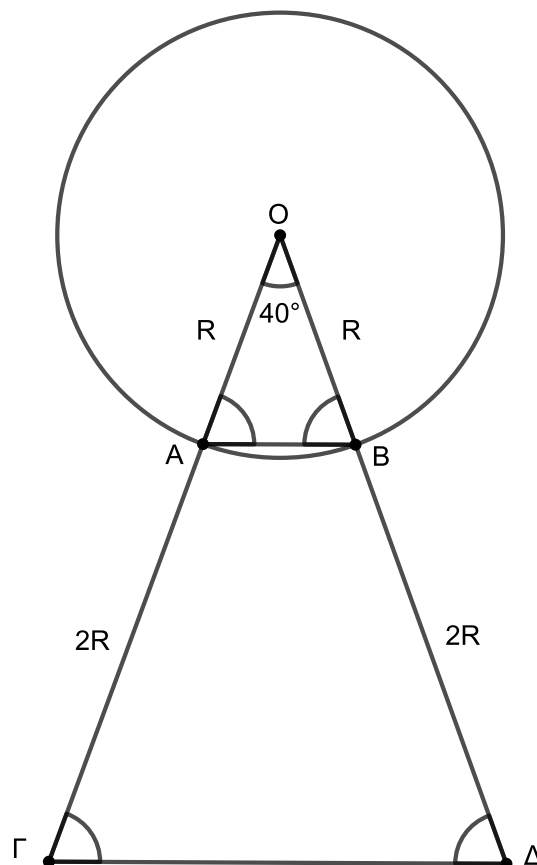
Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$$\hat{O} + Ο\hat{\Gamma}\Delta + Ο\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2Ο\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ \text{ ή } 2Ο\hat{\Gamma}\Delta = 140^\circ.$$

Άρα, $Ο\hat{\Gamma}\Delta = 70^\circ$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma = 70^\circ$.

ii. Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $Ο\hat{A}B$ και $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ ίσες. Επομένως, οι ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες, δηλαδή $ΑΒ // ΓΔ$.

γ)



Αν είναι $ΑΓ = 2ΟΑ = 2R$ και $ΒΔ = 2ΟΒ = 2R$, τότε τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ θα είναι ίσα, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 3R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 3R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ θα είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Οπότε, οι γωνίες $Ο\hat{\Gamma}\Delta$ και $Ο\hat{\Delta}\Gamma$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Ο\hat{\Gamma}\Delta = Ο\hat{\Delta}\Gamma$.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

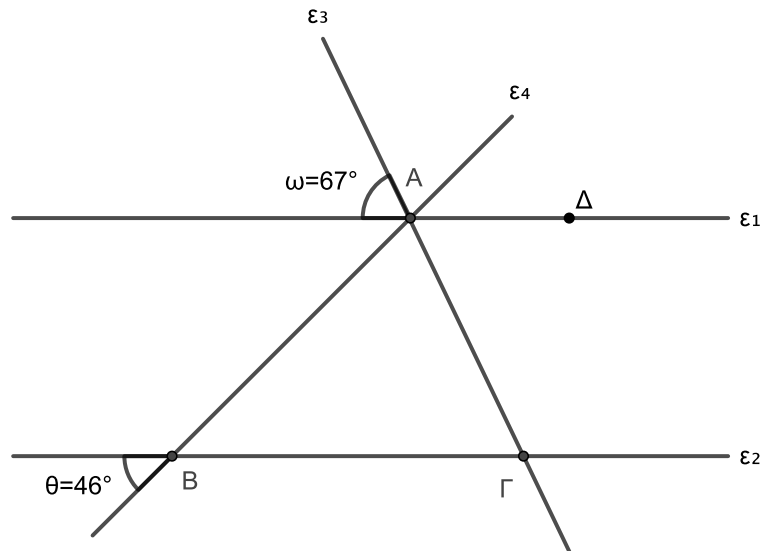
$$\widehat{O} + \widehat{O\Gamma\Delta} + \widehat{O\Delta\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 40^\circ + 2\widehat{O\Gamma\Delta} = 180^\circ \text{ ή } 2\widehat{O\Gamma\Delta} = 140^\circ.$$

Άρα, $\widehat{O\Gamma\Delta} = 70^\circ$ και $\widehat{O\Delta\Gamma} = 70^\circ$.

Όπως και στο ερώτημα (βii), οι AB και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\widehat{O\Delta\Gamma}$ και $\widehat{O\Gamma\Delta}$ ίσες. Επομένως, οι AB και ΓΔ είναι παράλληλες, δηλαδή $AB \parallel \Gamma\Delta$.

ΛΥΣΗ

α)



Οι γωνίες $\hat{\theta} = 46^\circ$ και $\hat{\Gamma\hat{B}A}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

Άρα, $\hat{\Gamma\hat{B}A} = 46^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{\omega} = 67^\circ$ και $\hat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι ίσες ως εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 τεμνόμενων από την ΑΓ.

Άρα, $\hat{A\hat{\Gamma}B} = 67^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\hat{\Gamma\hat{B}A} + \hat{A\hat{\Gamma}B} + \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 46^\circ + 67^\circ + \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ - 46^\circ - 67^\circ = 67^\circ.$$

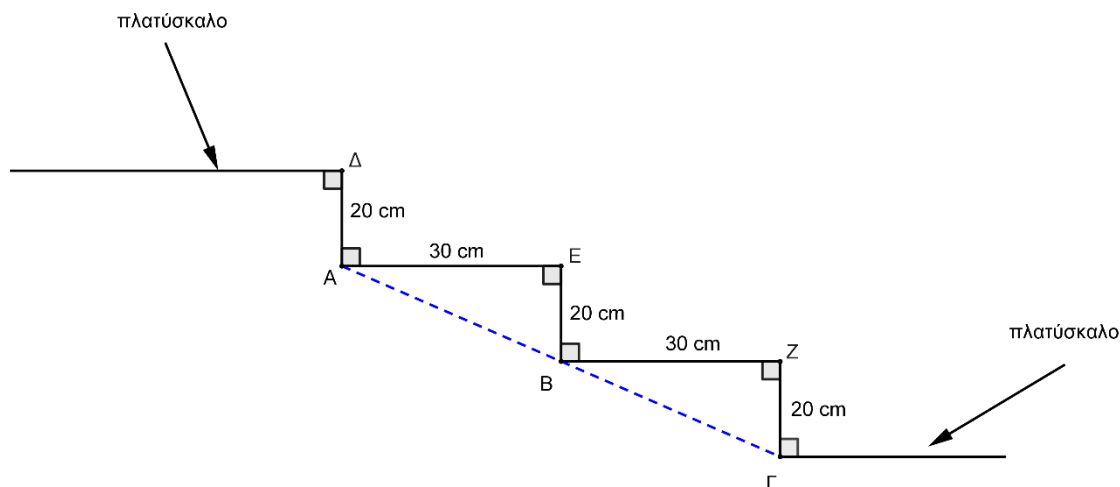
β) Αφού οι γωνίες $\hat{A\hat{\Gamma}B}$ και $\hat{B\hat{A}\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες με 67° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) i. Οι γωνίες $\hat{\omega} = 67^\circ$ και $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

$$\text{Άρα, } \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 67^\circ.$$

ii. Αφού οι γωνίες $\hat{B\hat{A}\Gamma}$ και $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ είναι ίσες με 67° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\hat{A}\Delta}$. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

ΛΥΣΗ



Έστω AB και $ΓB$ οι αποστάσεις των σημείων A και $Γ$ από το σημείο B .

α) Τα τρίγωνα AEB και $BZΓ$ έχουν:

- $AE = BZ = 30\text{cm}$
- $EB = ZΓ = 20\text{cm}$
- $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$

Οπότε τα τρίγωνα AEB και $BZΓ$ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα έχουν και τις αντίστοιχες υποτείνουσές τους AB και $BΓ$ ίσες, δηλαδή $AB = BΓ$. Άρα τα σημεία A και $Γ$ απέχουν το ίδιο από το σημείο B .

β) Για να βρίσκονται τα σημεία A , B και $Γ$ στην ίδια ευθεία αρκεί ναδειχθεί ότι η γωνία $A\hat{B}Γ$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $A\hat{B}Γ = 180^\circ$.

$$\text{Είναι } A\hat{B}Γ = A\hat{B}E + \hat{B} + Z\hat{B}Γ \quad (1)$$

Όμως είναι $A\hat{B}E = B\hat{Γ}Z$ (2), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AE και BZ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων AEB και $BZΓ$ του α) ερωτήματος.

$$\text{Από τα δεδομένα έχουμε ότι } \hat{B} = 90^\circ \quad (2)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZΓ$ οι οξείες γωνίες του $B\hat{Γ}Z$ και $Z\hat{B}Γ$ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $B\hat{Γ}Z + Z\hat{B}Γ = 90^\circ$ (3), οπότε λόγω της σχέσης (2) είναι $A\hat{B}E + Z\hat{B}Γ = 90^\circ$ (4)

Οπότε η σχέση (1) λόγω της σχέσης (4) δίνει $A\hat{B}Γ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Συνεπώς τα σημεία A, B και $Γ$ θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΛΥΣΗ

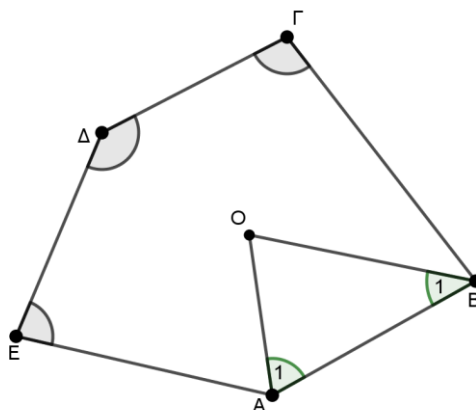
α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές ισούται με $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6 \text{ ορθές ή } 6 \cdot 90^\circ = 540^\circ.$$

Δηλαδή έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ$

β) Λόγω του (α) ερωτήματος έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ$ η οποία λόγω των δεδομένων γράφεται: $\hat{A} + \hat{B} + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ$ οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 220^\circ$.

γ)



Στο τρίγωνο AOB είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ (1).

Όμως AO και BO είναι διχοτόμοι των γωνιών A και B αντίστοιχα, άρα:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}. \text{ Έτσι } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \text{ η οποία λόγω του (β) ερωτήματος}$$

$$\text{δίνει: } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ, \text{ οπότε από την (1) παίρνουμε:}$$

$$110^\circ + \hat{O} = 180^\circ, \text{ επομένως } \hat{O} = 70^\circ, \text{ δηλαδή } \angle AOB = 70^\circ.$$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 130^\circ$, $\hat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 110^\circ$. Όμως $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ$ ή $\hat{\Gamma} + 130^\circ = 180^\circ$ άρα $\hat{\Gamma} = 50^\circ$.

Επίσης $\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ$ ή $\hat{\Delta} + 110^\circ = 180^\circ$ άρα $\hat{\Delta} = 70^\circ$.

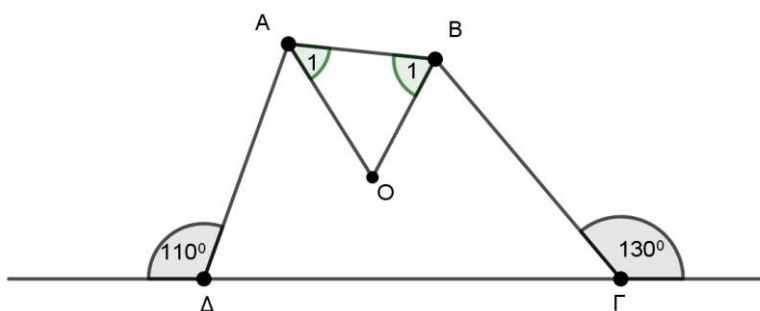
β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές ισούται με $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4 \text{ ορθές ή } 4 \cdot 90^\circ = 360^\circ.$$

Δηλαδή έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος γράφεται:

$$\hat{A} + \hat{B} + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \text{ οπότε } \hat{A} + \hat{B} = 240^\circ.$$

γ)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

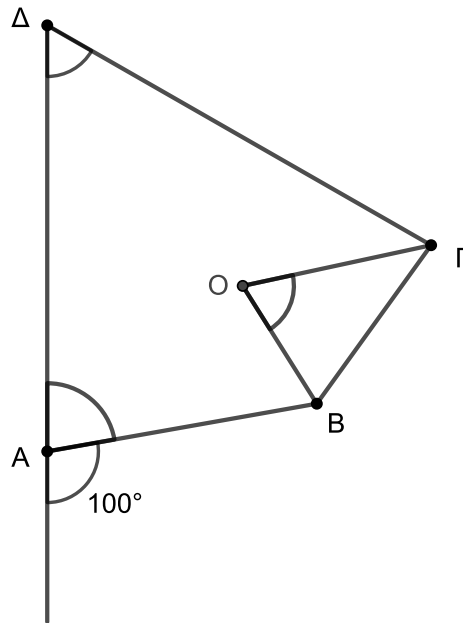
$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}. \text{ Έτσι } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

$$\text{η οποία λόγω του (β) ερωτήματος δίνει: } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

οπότε από την (1) παίρνουμε: $120^\circ + \hat{O} = 180^\circ$, επομένως $\hat{O} = 60^\circ$, δηλαδή $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

ΛΥΣΗ

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο.



α) Για τις γωνίες $\hat{A}_{εξ}$ και $\hat{A}$ ισχύει:

$$\hat{A}_{εξ} + \hat{A} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 100^\circ + \hat{A} = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{A} = 80^\circ.$$

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \quad \text{ή} \quad 80^\circ + 220^\circ + \hat{\Delta} = 360^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{\Delta} = 360^\circ - 80^\circ - 220^\circ = 60^\circ.$$

β) Στο τρίγωνο ΒΓΟ ισχύει:

$$\text{ΟΒΓ} + \text{ΒΓΟ} + \text{ΒΟΓ} = 180^\circ \quad (1)$$

Όμως

$$\text{ΟΒΓ} + \text{ΒΓΟ} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$110^\circ + \text{ΒΟΓ} = 180^\circ$$

$$\text{Άρα, } \text{ΒΟΓ} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

γ) Οι ΑΔ και ΒΓ τέμνονται από την ΑΒ. Επομένως, για να είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ θα πρέπει να σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\hat{A}$ και $\hat{B}$ παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Τότε θα είναι $\hat{\Gamma} = 220^\circ - 100^\circ = 120^\circ$, αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.