

1 Θέμα 2 - 13682

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $ΟΒΜ$ και $ΟΓΜ$ έχουν:

- $ΟΒ = ΟΓ$ (από δεδομένα)
- $\widehat{ΒΟΜ} = \widehat{ΜΟΓ}$ (αφού είναι $\widehat{ΒΟχ} = \widehat{ΜΟχ}$ από δεδομένα)
- $ΟΜ = ΟΜ$ (κοινή πλευρά)

Άρα, τα τρίγωνα $ΟΒΜ$ και $ΟΓΜ$ είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Κριτήριο ΠΓΠ).

β)

1. Η γωνία $\widehat{ΟΒΜ}$ του τριγώνου $ΟΒΜ$ είναι ίση με την γωνία $\widehat{ΟΓΜ}$ του τριγώνου $ΟΓΜ$.
2. Η γωνία $\widehat{ΟΜΒ}$ του τριγώνου $ΟΒΜ$ είναι ίση με την γωνία $\widehat{ΟΜΓ}$ του τριγώνου $ΟΓΜ$.

γ) Οι γωνίες $\widehat{ΒΜχ}$ και $\widehat{ΓΜχ}$ είναι ίσες, ως παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\widehat{ΟΜΒ}$ και $\widehat{ΟΜΓ}$ της πρότασης 2 του β) ερωτήματος.

2 Θέμα 2 - 12535

ΛΥΣΗ

α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου, οπότε $\widehat{B\hat{A}D} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- την ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{G\hat{A}D}$ γιατί η ΑΔ είναι η διχοτόμος του τριγώνου

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα.

Εναλλακτικά 1: Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος του ΑΔ είναι και ύψος, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ έχουν:

- την ΑΔ κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Εναλλακτικά 2: Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος του ΑΔ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι μέσο της ΒΓ, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ έχουν:

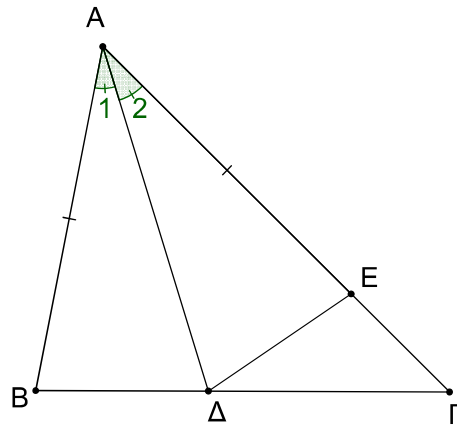
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- την ΑΔ κοινή πλευρά
- ΔΒ = ΔΓ γιατί το Δ μέσο της ΒΓ

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα.

3 Θέμα 2 - 13436

α) Το τμήμα ΑΕ είναι η διαφορά του ΕΓ από το ΑΓ, δηλαδή

$$ΑΕ = ΑΓ - ΕΓ = 7 - 2 = 5.$$



β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ τα οποία έχουν:

- $ΑΔ = ΑΔ$, κοινή πλευρά.
- $ΑΒ = ΑΕ = 5$, από τα δεδομένα και το ερώτημα α).
- $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$, γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

4 Θέμα 2 - 12454

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το Θ είναι μέσο της ΑΒ ισχύει $A\Theta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Επειδή το Η είναι μέσο της ΔΖ ισχύει $\Delta H = \frac{\Delta Z}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

β) Τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ έχουν:

- $A\Gamma = \Delta E$ (δεδομένα)
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (δεδομένα)
- $A\Theta = \Delta H$ από το ερώτημα (α)

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ είναι ίσα.

5 Θέμα 2 - 13445

ΛΥΣΗ

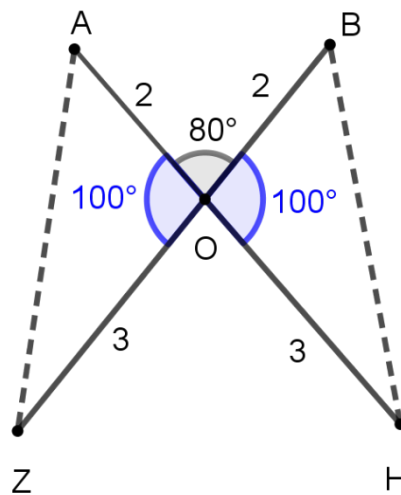
α) Οι γωνίες $\widehat{AOZ}$ και $\widehat{BOH}$ είναι κατακορυφήν γωνίες άρα θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AOZ} = \widehat{BOH}$.

Η γωνία $\widehat{AOZ}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{AOB}$, οπότε θα είναι $\widehat{AOZ} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ και αφού είναι $\widehat{AOB} = 80^\circ$ από τα δεδομένα, τότε θα είναι $\widehat{AOZ} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Οπότε είναι $\widehat{AOZ} = \widehat{BOH} = 100^\circ$.

β) Τα τρίγωνα AOZ και BOH έχουν:

- $OZ = OH = 3$, από δεδομένα
- $OA = OB = 2$, αφού είναι $OA = AH - OH = 5 - 3 = 2$ και $OB = BZ - OZ = 5 - 3 = 2$.
- $\widehat{AOZ} = \widehat{BOH} = 100^\circ$, από το α) ερώτημα.

Συνεπώς, τα τρίγωνα OAZ και OBH είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες.



6 Θέμα 2 - 12538

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν:

- την πλευρά $B\Gamma$ κοινή
- $AB = B\Delta$ από την υπόθεση
- $A\Gamma = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση

Οπότε τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα, εφόσον έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες (ΠΠΠ).

β) Λόγω του (α) ερωτήματος, για τα ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$, οι γωνίες $BA\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι αντίστοιχες γιατί βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά. Επομένως θα είναι ίσες. Άρα η $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{BA\Gamma} = 75^\circ$.

7 Θέμα 2 - 13527

α) Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα $\Delta\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{10}{2} = 5 = B\Gamma$.

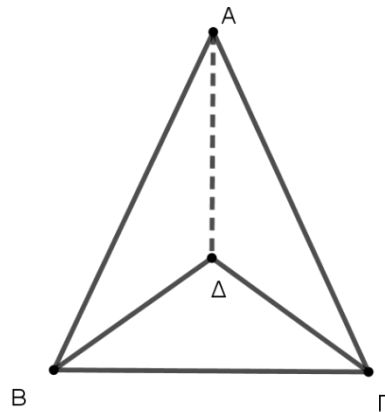
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν:

- $AB = ED = 10$, από τα δεδομένα.
- $AG = EG$, γιατί $AG = AB = 10$ και $EG = ED = 10$.
- $B\Gamma = \Delta\Gamma$, από το ερώτημα α).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΔΓ, που αποδείχθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΔΓ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ



α)

- 1) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $BA\Gamma$ είναι οι **AB** και **$A\Gamma$** .
- 2) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $B\Delta\Gamma$ είναι οι **ΔB** και **$\Delta\Gamma$** .
- 3) Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ η γωνία **$\widehat{GB\Delta}$** είναι ίση με την γωνία $B\widehat{\Gamma}\Delta$.
- 4) Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Gamma$ η γωνία $B\widehat{\Gamma}A$ είναι ίση με την γωνία **$\widehat{GBA}$** .

β) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$ (πρόταση 1 του α) ερωτήματος)
- $\Delta B = \Delta\Gamma$ (πρόταση 2 του α) ερωτήματος)
- $A\Delta = A\Delta$ (κοινή πλευρά)

Επομένως, τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

γ) 1. $\rightarrow$ β)

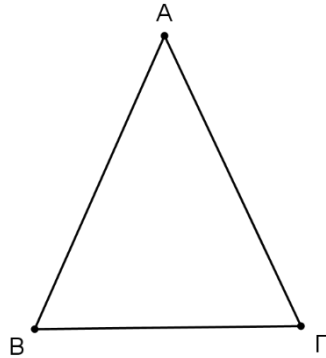
2. $\rightarrow$ γ)

3. $\rightarrow$ α)

9 Θέμα 2 - 13683

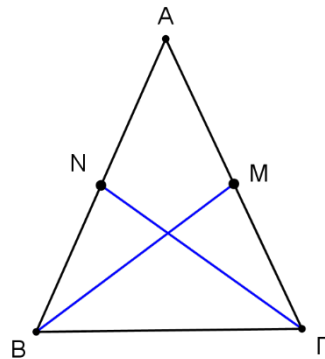
ΛΥΣΗ

Έστω το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση την πλευρά $B\Gamma$.



α) Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η πλευρά $B\Gamma$ είναι η βάση του, τότε οι ίσες πλευρές του θα είναι οι AB και $A\Gamma$, δηλαδή $AB = A\Gamma$. Οι ίσες γωνίες του θα είναι οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ ως προσκείμενες στη βάση του $B\Gamma$, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

β) Έστω BM και ΓN οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB .



i. Τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ έχουν:

- $B\Gamma = \Gamma B$ ως κοινή πλευρά
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$, από το α) ερώτημα
- $\Gamma M = BN$ ως μισά των ίσων πλευρών $A\Gamma$ και AB από το α) ερώτημα.

Συνεπώς, τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

ii. Αφού τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και $\Gamma B N$ είναι ίσα, τότε ως άμεσο συμπέρασμα της ισότητάς τους είναι $BM = \Gamma N$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B}$ αντίστοιχα.

10 Θέμα 2 - 13685

ΛΥΣΗ

α) Είναι $OA = OB$ ως ακτίνες του κύκλου, άρα το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές με βάση $BΓ$, οπότε οι προσκείμενες γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ στη $BΓ$ θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (1).

β) Τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΒΔ$ έχουν:

- $OA = OB$, ως ακτίνες του κύκλου.
- $ΑΓ = ΒΔ$, από τα δεδομένα.
- $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$, από τη σχέση (1)

Άρα τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΒΔ$ θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

γ) Αφού τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΒΔ$ είναι ίσα (από το β) ερώτημα) θα είναι και $ΟΓ = ΟΔ$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα.

11 Θέμα 4 - 12512

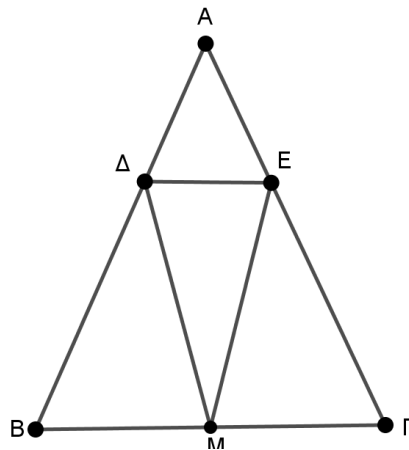
ΛΥΣΗ

α) Επειδή $AB = AG$ θα είναι και $\frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}AG$ άρα $AD = AE$ οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $AB = AG$ και $AD = AE$, θα ισχύει:

$$AB - AD = AG - AE \text{ δηλαδή } BD = GE.$$

γ)

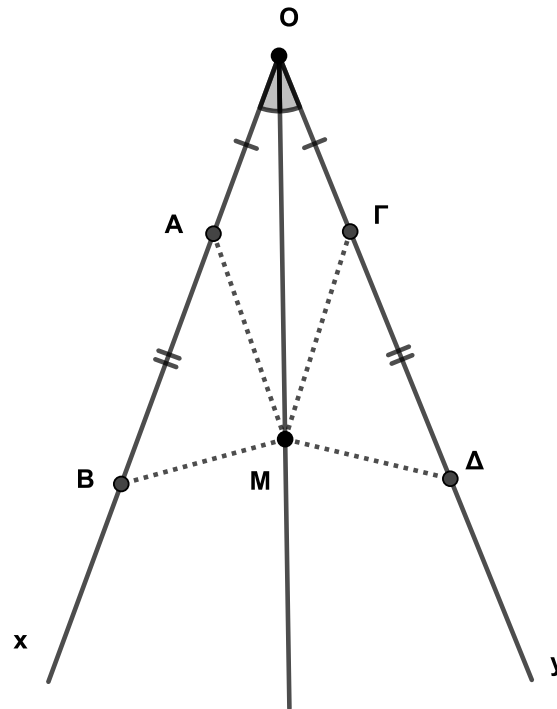


i. Τα τρίγωνα BDM και GEM έχουν:

- $BD = GE$ λόγω του (β) ερωτήματος
- $MB = MG$ γιατί το M είναι μέσο της $BΓ$ και
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$.

οπότε συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα BDM και GEM είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα BDM και GEM είναι ίσα, θα είναι και $MD = ME$, ως πλευρές των ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B και Γ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OMB και $OMΔ$ που έχουν:

- i. OM κοινή πλευρά
- ii. $OB=OD$ (υπόθεση)
- iii. $\widehat{BOM} = \widehat{DOM}$ (OM διχοτόμος της γωνίας xOy)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα $MB=MD$ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{BOM}$ και $\widehat{DOM}$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMB και $ΓMΔ$ που έχουν:

- i. $MB=MD$ (από ερώτημα α))
- ii. $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMΔ}$ (από την προηγούμενη σύγκριση και επειδή είναι απέναντι από την κοινή πλευρά OM)
- iii. $AB=ΓΔ$ (ως διαφορά ίσως τμημάτων $OB-OA$ και $OD-ΟΓ$)

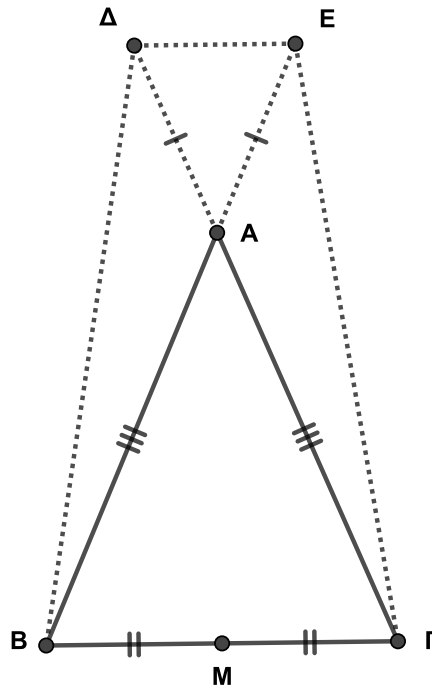
Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMΔ}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $AB=OB-OA$ και $ΓΔ=OD-ΟΓ$.

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και $ΟΓM$ που έχουν:

- i. OM κοινή πλευρά
- ii. $OA=OB$ (υπόθεση)

- iii. $AM=GM$ (από την προηγούμενη σύγκριση και αφού είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ABM}$ και $\widehat{GDM}$)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα έχουν και $\widehat{AMO}=\widehat{GMO}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OG .

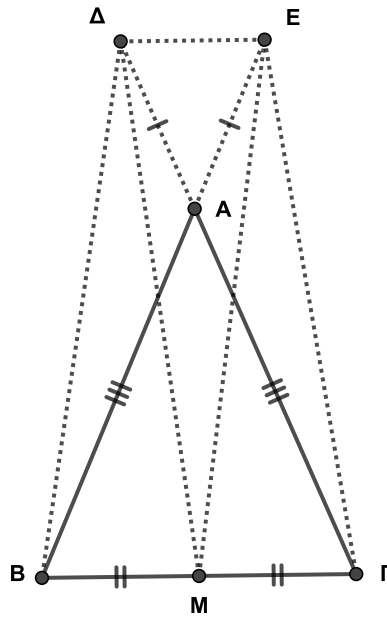


α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ που έχουν:

- i. $AB=AG$ (υπόθεση)
- ii. $AD=AE$ (υπόθεση)
- iii. $\widehat{BAD}=\widehat{GAE}$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Άρα $BD=GE$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{BAD}$ και $\widehat{GAE}$.

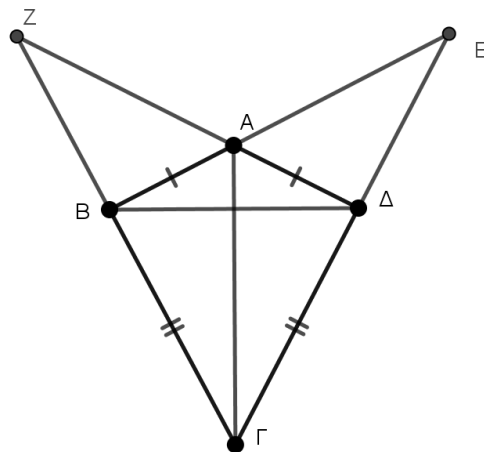
β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ (ως προσκείμενες στη βάση γωνίες, ισοσκελούς τριγώνου) και από την σύγκριση του ερωτήματος α) έχουμε $\widehat{ABD}=\widehat{AGE}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AE . Έχουμε $\widehat{ABD}+\widehat{B}=\widehat{AGE}+\widehat{\Gamma}$ ή $\widehat{B\Delta D}=\widehat{B\Gamma E}$.



γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BM\Delta$ και ΓME που έχουν:

- i. $BM = \Gamma M$ (M μέσο της πλευράς $B\Gamma$)
- ii. $B\Delta = \Gamma E$ (από ερώτημα α))
- iii. $\widehat{MB\Delta} = \widehat{M\Gamma E}$ (από ερώτημα β))

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα $M\Delta = ME$.

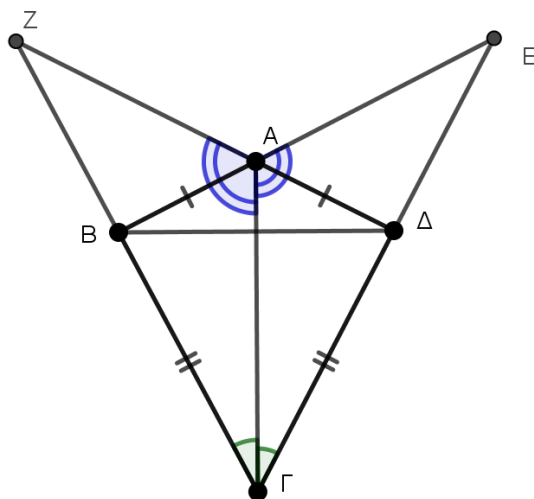


α) Στα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΓ:

- $AB = AD$, από υπόθεση
- $GB = GD$, από υπόθεση
- GA κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΓ έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, άρα είναι ίσα.

Οπότε $\widehat{BGA} = \widehat{AGD}$ διότι είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB, AD αντίστοιχα. Άρα η GA είναι διχοτόμος της γωνίας BΓΔ.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΑΔΓ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι $\widehat{BGA} = \widehat{AGD}$ (1), διότι είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές GB και GD αντίστοιχα. Επιπλέον $\widehat{ZAB} = \widehat{EAD}$ (2) ως κατακορυφήν γωνίες.

Λόγω των (1) και (2) έχουμε : $\widehat{ZAG} = \widehat{ZAB} + \widehat{BGA} = \widehat{EAD} + \widehat{AGD} = \widehat{EAG}$.

γ) Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

- $\widehat{BGA} = \widehat{AGD}$, από ερώτημα α)

- ΑΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{Z\hat{A}G} = \widehat{E\hat{A}G}$, από ερώτημα β)

Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες μία προς μία ίσες, οπότε από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα. Συνεπώς ισχύει $\Gamma Z = \Gamma E$, διότι είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Z\hat{A}G}$, $\widehat{E\hat{A}G}$.

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα MAB , $MA\Gamma$ έχουν

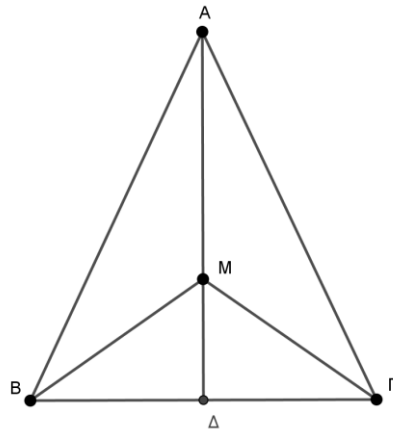
- την MA κοινή πλευρά
- $MB = M\Gamma$, από την υπόθεση
- $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα MAB και $MA\Gamma$ είναι ίσα (ΠΠΠ).

β) Λόγω του (α) θα είναι $\widehat{MAB} = \widehat{MA\Gamma}$, ως γωνίες των ίσων τριγώνων MAB , $MA\Gamma$ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους MB και $M\Gamma$ αντίστοιχα.

Άρα η MA διχοτομεί τη γωνία A .

γ)



Λόγω του (β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα θα είναι και ύψος, οπότε $A\Delta \perp B\Gamma$, επομένως $M\Delta \perp B\Gamma$, δηλαδή το $M\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $MB\Gamma$.

16 Θέμα 4 - 13530

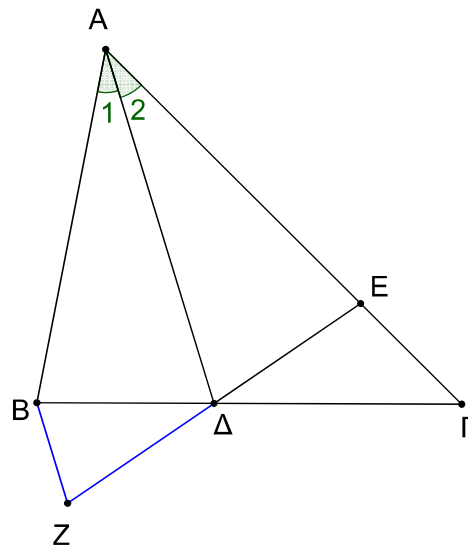
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $AD = AD$, κοινή πλευρά.
- $AB = AE$, γιατί από τα δεδομένα έχουμε $AB = 10$ και $AE = AG - EG = 14 - 4 = 10$.
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

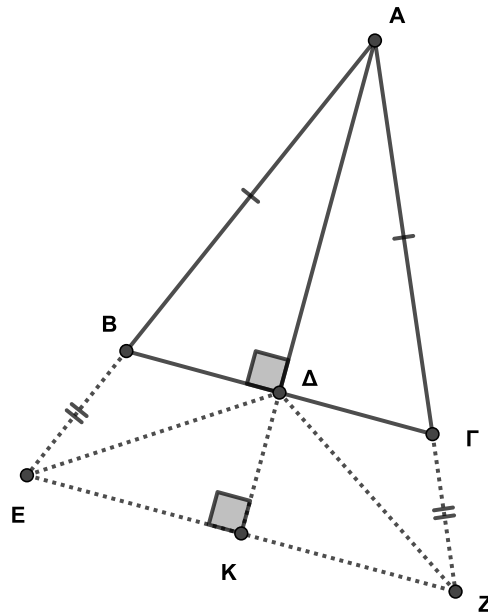
Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

β) Αφού τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$, δηλαδή $B\Delta = DE$.

γ)



Είναι $\Delta Z = \Delta E$, από τα δεδομένα και $B\Delta = DE$ από το προηγούμενο ερώτημα, άρα $\Delta Z = B\Delta$. Δηλαδή το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του BZ είναι ίσες, άρα $\hat{\Delta BZ} = \hat{\Delta ZB}$.



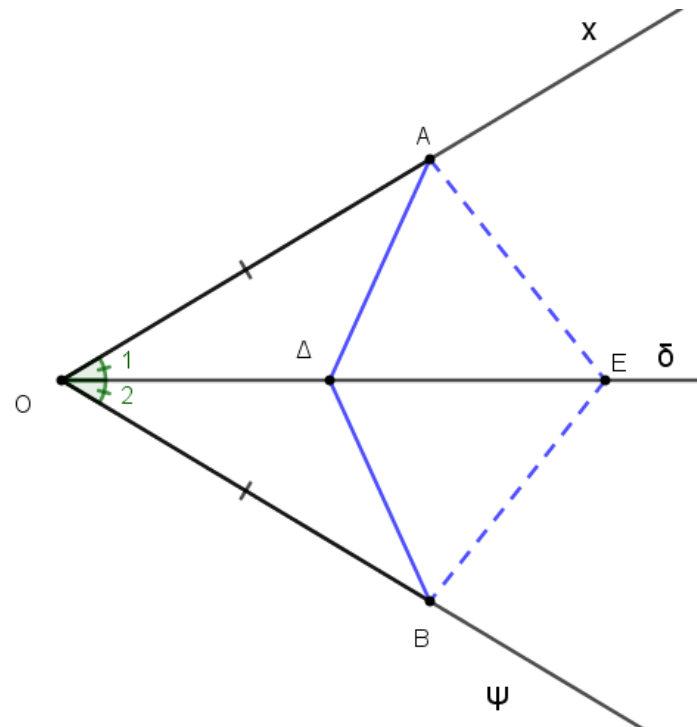
α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το τμήμα AD είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση $B\Gamma$ άρα είναι και διχοτόμος δηλαδή ισχύει $\widehat{B\Delta D} = \widehat{G\Delta D}$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AED και AZD που έχουν:

- i. AD κοινή πλευρά
- ii. $AE = AZ$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων $AB + BE$ και $AG + GZ$)
- iii. $\widehat{B\Delta D} = \widehat{G\Delta D}$ (προηγούμενο ερώτημα)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

γ) Από τη σύγκριση του ερωτήματος β) έχουμε $ED = DZ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\Delta D}$ και $\widehat{G\Delta D}$ των ίσων τριγώνων AED και AZD , άρα το τρίγωνο EDZ είναι ισοσκελές με βάση EZ και το τμήμα DK είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του EZ άρα είναι και διάμεσος δηλαδή το σημείο K είναι το μέσο του EZ ή $EK = KZ$.



α) Τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Delta B$ έχουν:

$OA = OB$, από υπόθεση,

OD κοινή πλευρά,

$\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$, επειδή η OD είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi O \psi$.

Επομένως είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $O\Delta A$ και $O\Delta B$ προκύπτει ότι $\widehat{A\Delta O} = \widehat{B\Delta O}$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OB αντίστοιχα. Επομένως, θα είναι $\widehat{A\Delta E} = \widehat{B\Delta E}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A\Delta O}$ και $\widehat{B\Delta O}$ αντίστοιχα.

γ) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Delta E$ έχουν:

ΔE κοινή πλευρά,

$\Delta A = \Delta B$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A\Delta O}$ και $\widehat{B\Delta O}$ των ίσων τριγώνων $O\Delta A$ και $O\Delta B$ αντίστοιχα,

$\widehat{A\Delta E} = \widehat{B\Delta E}$, από το ερώτημα β).

Επομένως είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Άρα $AE = BE$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες

γωνίες $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{B\Delta E}$ αντίστοιχα. Επομένως ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουν:

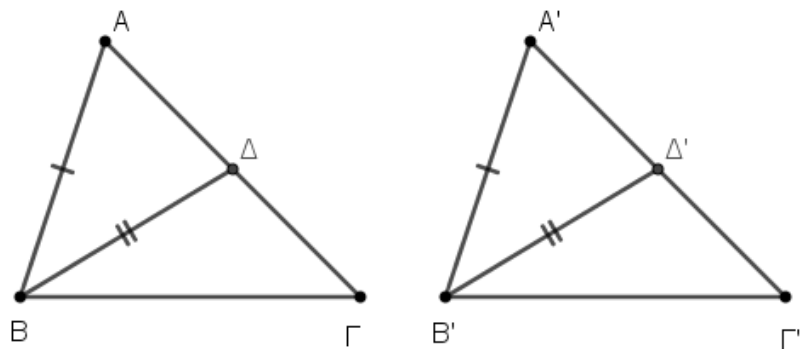
$B\Delta = B'\Delta'$, από υπόθεση.

$AB = A'B'$, από υπόθεση.

$A\Delta = A'\Delta'$, ως μισά των ίσων πλευρών $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Επομένως $\hat{A} = \hat{A'}$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Delta$ και $B'\Delta'$ αντίστοιχα.



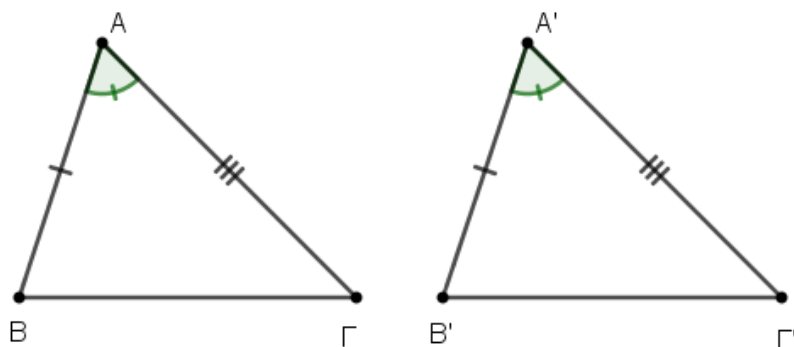
β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$AB = A'B'$, από υπόθεση.

$A\Gamma = A'\Gamma'$, από υπόθεση.

$\hat{A} = \hat{A'}$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



Οπότε ο ισχυρισμός του μαθητή δεν είναι σωστός. Τα στοιχεία που έχουμε αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ έχουν:

$A\Delta = \Gamma\Delta$ από υπόθεση

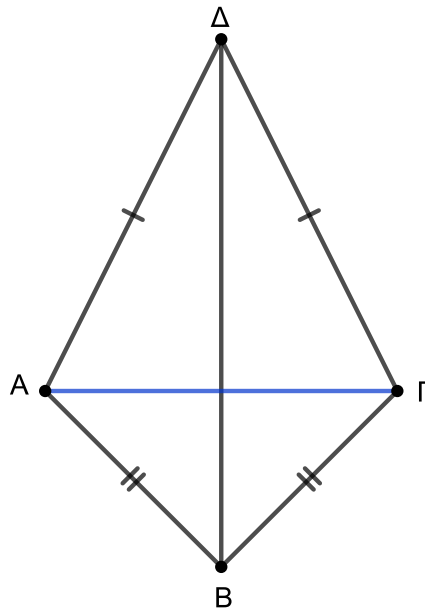
$AB = \Gamma B$ από υπόθεση

ΔB κοινή πλευρά

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ίσα, αφού έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π-Π-Π).

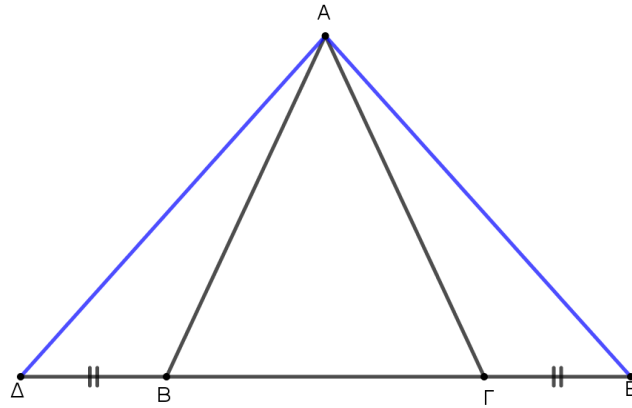
β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ προκύπτει ότι $\widehat{A\Delta B} = \widehat{B\Delta \Gamma}$, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB και ΓB αντίστοιχα. Άρα, η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta \Gamma}$.

γ)



Το σημείο Δ ισαπέχει από τα σημεία A και Γ , αφού $A\Delta = \Gamma\Delta$. Επομένως, βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$. Όμοια, και το σημείο B βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$, αφού $AB = \Gamma B$. Άρα, η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$.

Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.



α) Είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή ABΓ ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ. Τότε:

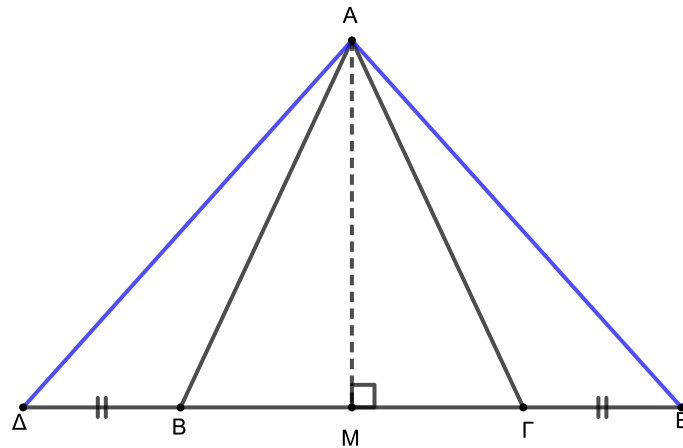
$$\widehat{B}_{εξ} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_{εξ}.$$

β) Τα τρίγωνα ABΔ και AΓΕ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, από υπόθεση.
- $BD = \Gamma E$, από υπόθεση.
- $\widehat{B}_{εξ} = \widehat{\Gamma}_{εξ}$, από το α) ερώτημα.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή είναι ίσα με το κριτήριο Π–Γ–Π.

γ)



Ύψος τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή του στο φορέα της απέναντι πλευράς. Τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία από κατασκευή. Τα τρίγωνα ABΓ, ABΔ και AΓΕ έχουν κοινή κορυφή το σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία αυτή. Η κάθετη από σημείο εκτός ευθείας είναι μοναδική, επομένως από το σημείο Α υπάρχει μοναδική κάθετη στην ευθεία ΔΕ και είναι το τμήμα ΑΜ. Δηλαδή τα τρίγωνα ABΓ, ABΔ και AΓΕ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, οπότε ο μαθητής έχει δίκιο.

ΛΥΣΗ

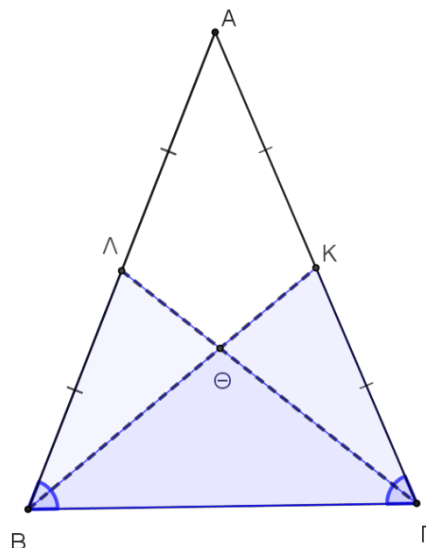
α)

i. Αφού οι ΓΛ και ΒΚ είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, τότε τα σημεία Λ και Κ θα είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και θα ισχύουν: $ΑΛ = ΛΒ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1) και $ΑΚ = ΚΓ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2). Και αφού είναι $ΑΒ = ΑΓ$ (από την υπόθεση), τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα είναι $ΛΒ = ΚΓ$ ως μισά ίσων τμημάτων.

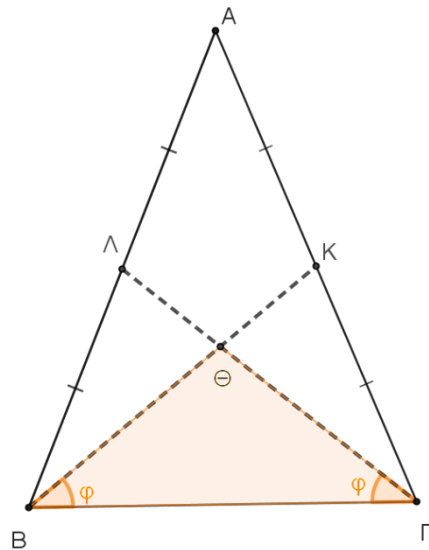
ii. Τα τρίγωνα ΛΒΓ και ΚΓΒ έχουν:

- $ΛΒ = ΚΓ$ (από το α) ερώτημα).
- $ΒΓ = ΒΓ$ (κοινή πλευρά).
- $ΛΒΓ = ΚΓΒ$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως, τα τρίγωνα ΛΒΓ και ΚΓΒ θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

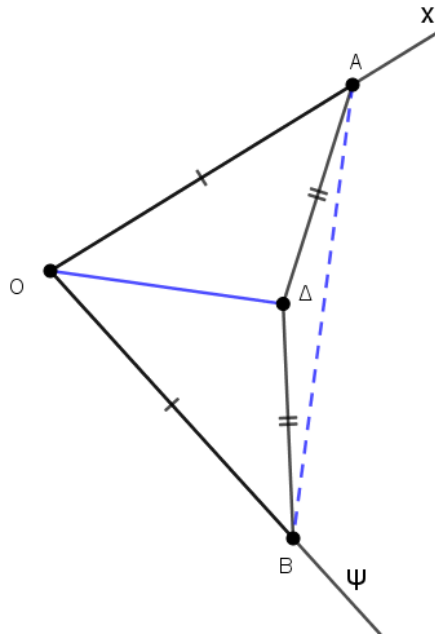


β) Αφού τα τρίγωνα ΛΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσα από το α) ii. ερώτημα, τότε θα είναι $ΛΒΓ = ΚΓΒ = \hat{\phi}$, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΛ και ΚΓ των ίσων τριγώνων. Οπότε το τρίγωνο ΒΘΓ θα είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο γωνίες ίσες.



γ) Αν η διάμεσος ΒΚ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΓ είναι και ύψος, τότε η ΒΚ θα είναι κάθετη στο μέσο του τμήματος ΑΓ, οπότε θα είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΑΓ. Το Β ως σημείο της μεσοκαθέτου ΒΚ θα ισαπάχει από τα άκρα του, δηλαδή θα είναι $BA = BΓ$ (3).

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AΓ$ και επειδή είναι $BA = BΓ$, από σχέση (3), προκύπτει ότι $BA = BΓ = ΓΑ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τρεις πλευρές ίσες.



α) i. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ έχουν:

$OA = OB$, από υπόθεση.

OD κοινή.

$AD = BD$, από υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΔ, έχουμε ότι $\widehat{A\hat{O}D} = \widehat{B\hat{O}D}$, επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Επομένως, η ΟΔ είναι

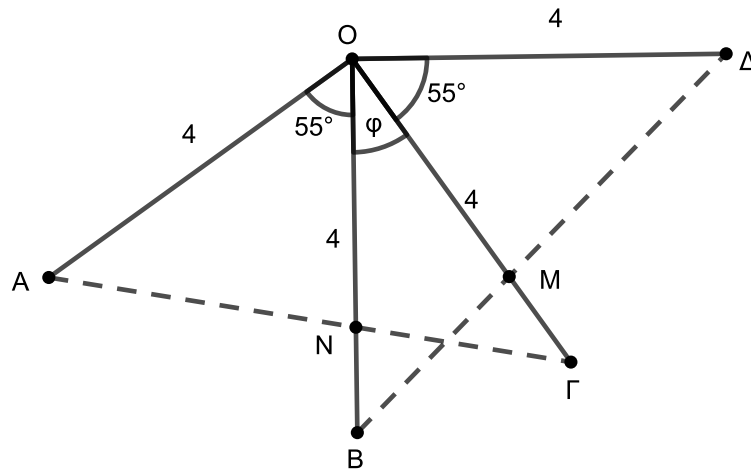
διχοτόμος της $\widehat{AOB}$, οπότε: $\widehat{A\hat{O}D} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

β) $OA = OB$, από υπόθεση, άρα το Ο ανήκει στην μεσοκάθετο της ΑΒ.

$DA = DB$, από υπόθεση, άρα το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΑΒ.

Επομένως, η ΟΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΒ.

Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



α)

i. $\widehat{AOG} = \widehat{AOB} + \phi = 55^\circ + \phi$ και $\widehat{BOD} = \widehat{BOG} + \phi = 55^\circ + \phi$.

Άρα $\widehat{AOG} = \widehat{BOD} = 55^\circ + \phi$ (1).

ii. Τα τρίγωνα AOG και BOD έχουν:

- $OA = OB = 4$, από υπόθεση
- $OG = OD = 4$, από υπόθεση
- $\widehat{AOG} = \widehat{BOD} = 55^\circ + \phi$, λόγω της σχέσης (1)

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

β) Αν το σημείο M είναι μέσο του τμήματος BD, τότε το τμήμα OM θα είναι διάμεσος της βάσης BD στο ισοσκελές τρίγωνο BOD. Επειδή όμως η διάμεσος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, το τμήμα OM θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BOD}$. Δηλαδή θα πρέπει $\widehat{BOM} = \widehat{MOD} = 55^\circ$ ή αλλιώς $\phi = 55^\circ$.

Πράγματι, αν $\phi = 55^\circ$ τότε στο ισοσκελές τρίγωνο BOD το τμήμα OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, επομένως είναι και διάμεσος. Δηλαδή το M είναι το μέσο του BD.

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\widehat{\Delta\hat{A}E}$ του τριγώνου ΔAE , ως παραπληρωματική γωνία της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$ του τριγώνου $BA\Gamma$, θα είναι $\widehat{\Delta\hat{A}E} = 90^\circ$. Οπότε το τρίγωνο ΔAE είναι ορθογώνιο. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

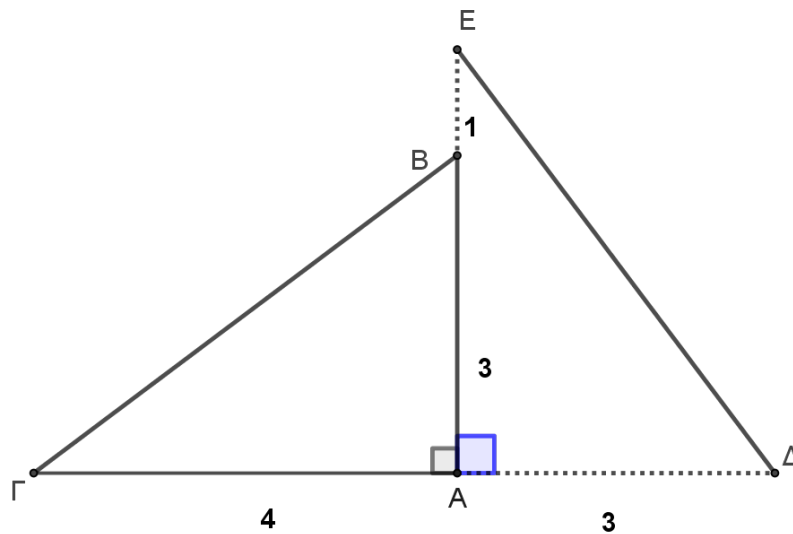
β) Τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και ΔAE έχουν:

- $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}E} = 90^\circ$ (από δεδομένα και α) ερώτημα)
- $BA = AD = 3$
- $AG = AE = 4$, αφού $AE = AB + BE = 3 + 1 = 4$.

Άρα τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και ΔAE είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

γ)

- Η γωνία $\widehat{B\hat{\Gamma}A}$ του τριγώνου $BA\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\Delta\hat{E}A}$ του τριγώνου ΔAE .
- Η γωνία $\widehat{A\hat{\Delta}E}$ του τριγώνου ΔAE είναι ίση με τη γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ του τριγώνου $BA\Gamma$.



ΛΥΣΗ

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle BDA$ και $\triangle BDE$ έχουν:

- την DB κοινή πλευρά
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ γιατί η BD είναι διχοτόμος από την υπόθεση

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $AD = DE$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1 και B_2 αντίστοιχα.

Επίσης τα ίσα τρίγωνα, έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες. Δηλαδή τις γωνίες BDA και BDE αντίστοιχα, επομένως θα είναι και $AB = EB$, ως ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες, ίσων τριγώνων.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle DZA$ και $\triangle DGE$ έχουν:

- $DA = DE$, λόγω του (α) ερωτήματος
- $\widehat{AZD} = \widehat{EGD}$, ως κατακορυφήν γωνίες

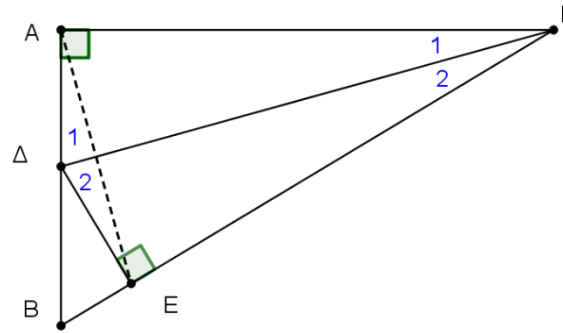
Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ορθές τους γωνίες ίσες, δηλαδή $DZ = DG$.

γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ABG$ και $\triangle EBZ$ έχουν:

- $AB = EB$ λόγω του (α)
- Τη γωνία B κοινή

Άρα τα δύο τρίγωνα $\triangle ABG$ και $\triangle EBZ$ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ έχουν:

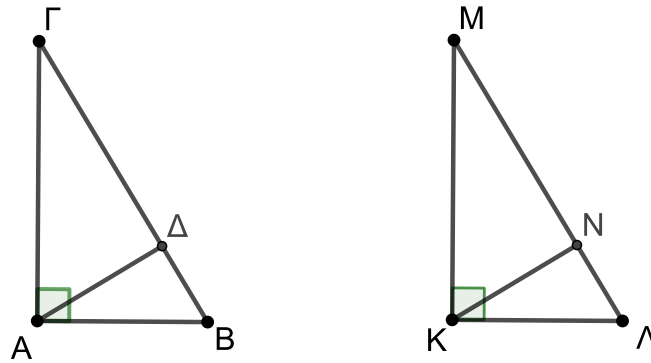
- $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, γιατί το τμήμα ΔΕ είναι κάθετο στη ΒΓ οπότε $\hat{E} = 90^\circ$ καθώς και $\hat{A} = 90^\circ$ από δεδομένα.
- $ΓΔ = ΓΔ$, ως κοινή πλευρά.
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, γιατί η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ από τα δεδομένα.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

ι. Αφού τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΕΓΔ είναι ίσα θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

- $ΔΑ = ΔΕ$ (1), ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$
- $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ (2), ως συμπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$ των ορθογωνίων τριγώνων ΓΑΔ και ΓΕΔ αντίστοιχα.
- $ΓΑ = ΓΕ$ (3), ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{Δ}_1$ και $\hat{Δ}_2$ της σχέσης (2).

β) Αφού είναι $ΔΑ = ΔΕ$ από τη σχέση (1), τότε το σημείο Δ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε. Επίσης είναι $ΓΑ = ΓΕ$ από τη σχέση (3), οπότε το σημείο Γ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε. Άρα τα διαφορετικά σημεία Γ και Δ θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΕ, οπότε η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ:

- i. Είναι ορθογώνιο με $\widehat{Α} = \widehat{Κ} = 90^\circ$ (από υπόθεση)
- ii. $ΑΓ = ΚΜ$ (από υπόθεση)
- iii. $ΒΓ = ΛΜ$ (από υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα ίσες μία προς μία.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΚΛΝ:

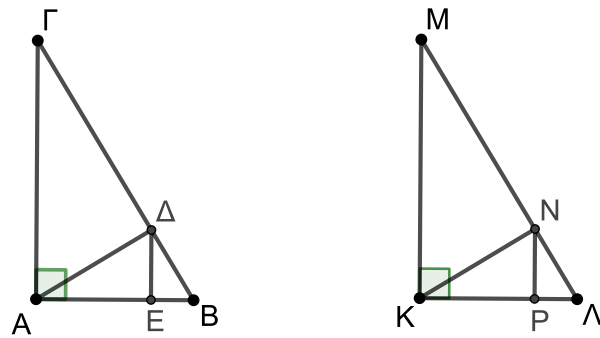
- i. Είναι ορθογώνιο με $\widehat{Δ} = \widehat{Ν} = 90^\circ$ (εφόσον τα ΑΔ και ΚΝ είναι ύψη)
- ii. $ΑΒ = ΚΛ$ (από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ)
- iii. $\widehat{Β} = \widehat{Λ}$ (ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΚΜ των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσά τους και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

Επομένως οι κάθετες πλευρές τους ΑΔ και ΚΝ είναι ίσες, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Λ}$, στα ίσα τρίγωνα.

γ) Σε ίσα ορθογώνια τρίγωνα, τα ύψη τους που φέρονται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίσα.

δ)



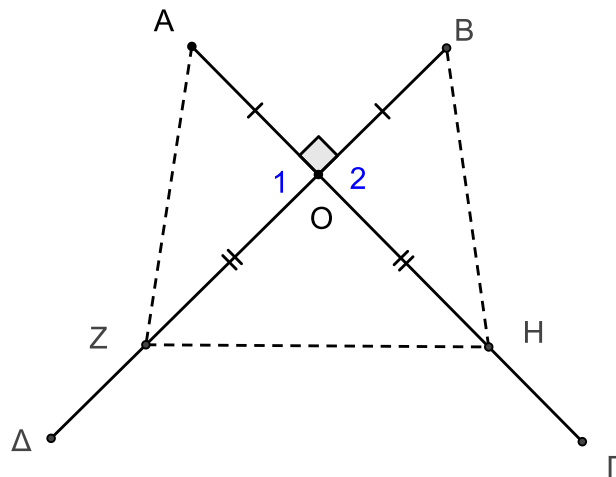
Τα ΔE και NP είναι ύψη από την κορυφή των ορθών γωνιών των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Delta$ και $Κ\Lambda N$. Εφόσον τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $Κ\Lambda N$ είναι ίσα, τότε σύμφωνα με το (γ) θα είναι $\Delta E = NP$.

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ έχουν:

- $OA = OB$ από δεδομένα
- $OZ = OH$ από δεδομένα
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = 90^\circ$, γιατί τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα.

Συνεπώς, τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες μία προς μία.



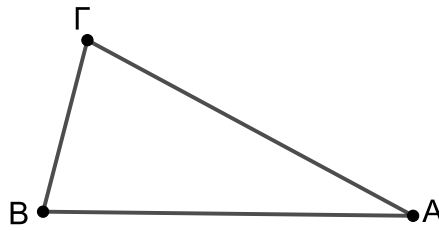
β) Αφού τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ του ερωτήματος α) είναι ίσα θα έχουν και όλα τα άλλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Δηλαδή, θα είναι $\widehat{OAZ} = \widehat{OBH}$ (ισότητα 1) ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΖ και ΟΗ αντίστοιχα, καθώς και $AZ = BH$ (ισότητα 3) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{O}_1$ και $\widehat{O}_2$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων του α) ερωτήματος είναι οι ισότητες 1 και 3.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι είναι $AZ = BH$. Επειδή το Ζ είναι σημείο της ΔΒ και η ΔΒ είναι κάθετη στην ΑΓ από τα δεδομένα, θα είναι $AZ = ZH$ όταν η ΔΒ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΗ. Οπότε είναι $OA = OH$ (1).

Όμοια, επειδή το Η είναι σημείο της ΑΓ και η ΑΓ είναι κάθετη στην ΔΒ από τα δεδομένα, θα είναι $ZH = HB$ όταν η ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΒ. Οπότε θα είναι $OB = OZ$ (2).

Από (1) και (2) θα προκύπτει ότι για να είναι το ΖΗ ίσο με το ΑΗ και το ΒΗ αρκεί να είναι $OA = OZ = OH = OB$.

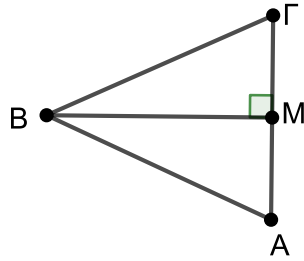


α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Επομένως για τις γωνίες της βάσης του BΓ ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

β) Από την υπόθεση ισχύει ότι $\hat{B} > \hat{A}$. Άρα οι απέναντι πλευρές από τις $\hat{B}, \hat{A}$ στο τρίγωνο ABΓ είναι ομοίως άνισες. Απέναντι από τη $\hat{B}$ είναι η AΓ και απέναντι από την $\hat{A}$ είναι η BΓ. Άρα $A\Gamma > B\Gamma$.

γ) Από την υπόθεση $\hat{B} > \hat{A}$ και από το α) έχουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\hat{\Gamma} > \hat{A}$.

Συνεπώς η μικρότερη γωνία του τριγώνου ABΓ είναι η $\hat{A}$.



α) Το BM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ, αλλά και ύψος του καθώς είναι κάθετο στην πλευρά AG. Επομένως, το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση την AG.

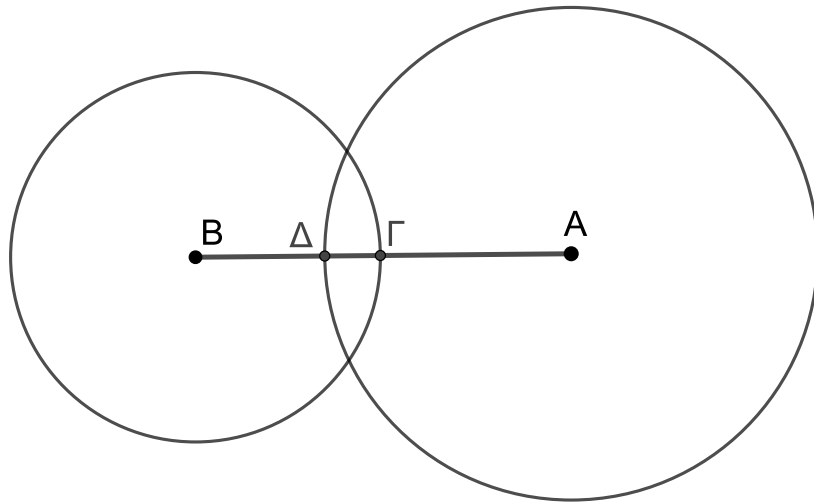
β) i. Η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με 40. Επομένως $AB + BG = 40 - AG = 40 - 12 = 28$ μέτρα.

Το ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = BG$.

Άρα $AB = 28:2 = 14$ μέτρα.

ii. Επίσης το M είναι μέσο του AG, άρα $AM = 12:2 = 6$ μέτρα.

Άρα, για την περίφραξη χρειαζόμαστε $28 + 6 = 34$ μέτρα.



α) Το $B\Gamma$ είναι ακτίνα του κύκλου με κέντρο B, άρα $B\Gamma = 3$.

Το $A\Delta$ είναι ακτίνα του κύκλου με κέντρο A, άρα $A\Delta = 4$.

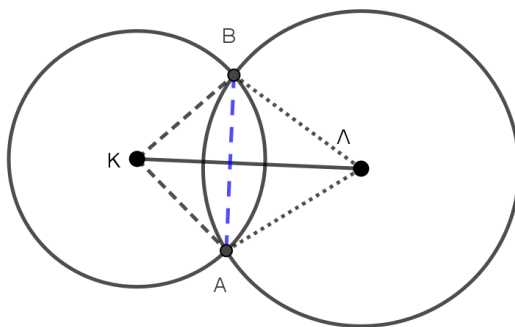
β) Η πρόταση ii. «Το AB είναι μικρότερο από 7» είναι η σωστή πρόταση, γιατί οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα η απόσταση των κέντρων τους είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτινών τους.

α) Στα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $BK\Lambda$:

- $KA = KB$, ως ακτίνες του κύκλου με κέντρο K
- $LA = LB$, ως ακτίνες του κύκλου με κέντρο Λ
- $K\Lambda = K\Lambda$ κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα από το κριτήριο ΠΠΠ.

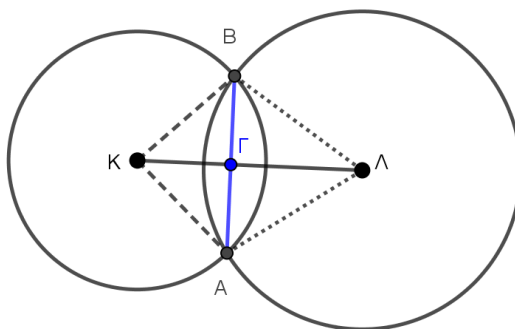
β)



Στο τρίγωνο AKB οι πλευρές του KA και KB είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές με βάση την AB .

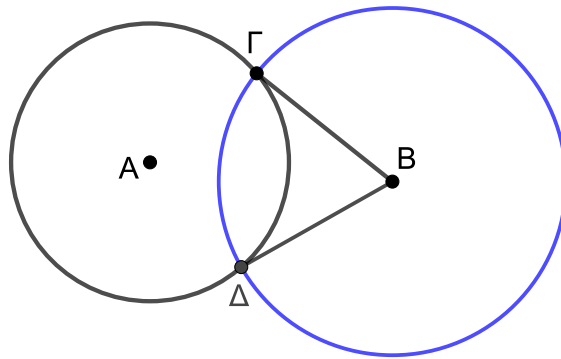
Ομοίως στο τρίγωνο $A\Lambda B$ οι πλευρές του LA και LB είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $A\Lambda B$ είναι ισοσκελές με βάση AB .

γ) Έστω Γ το σημείο τομής των $K\Lambda$ και AB



- Από την ισότητα των τριγώνων $AK\Lambda$ και $BK\Lambda$ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι οι γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ και $\widehat{BK\Lambda}$ είναι ίσες, αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές LA και LB αντίστοιχα. Άρα η $K\Gamma$ είναι διχοτόμος τη γωνίας $\widehat{AKB}$ ή η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AKB}$.
- Το τρίγωνο AKB , όπως δείξαμε στο ερώτημα β), είναι ισοσκελές και η $K\Gamma$ από i) είναι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής $\widehat{AKB}$. Η διχοτόμος της γωνίας

της κορυφής στο ισοσκελές τρίγωνο θα είναι και ύψος του τριγώνου, άρα η ΚΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, ή η ΚΛ είναι κάθετη στη χορδή ΑΒ.



α) Στο αρχικό σχήμα υπάρχει ο κύκλος $(A, 4)$. Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το B και ακτίνα BG, δηλαδή τον $(B, 5)$. Οι κύκλοι $(A, 4)$ και $(B, 5)$ τέμνονται, γιατί:

$$5 - 4 < AB < 5 + 4 \text{ ή } 1 < 7 < 9$$

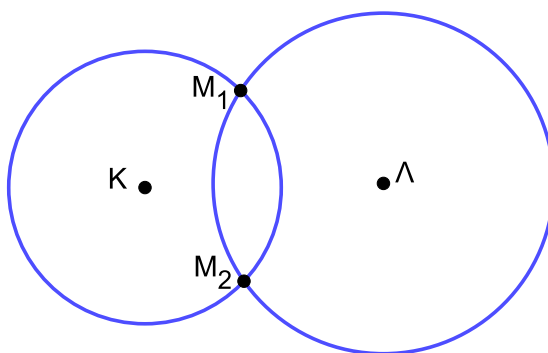
Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το B, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο A και $\delta = AB$ η διάκεντρός τους. Επομένως οι κύκλοι τέμνονται και άρα έχουν δύο κοινά σημεία, το Γ και το Δ. Το BΔ είναι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα.

β) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

1^η περίπτωση: Το M απέχει 4 από το K και 5 από το Λ.

Τότε το M είναι το κοινό σημείο των δύο κύκλων $(K, 4)$ και $(\Lambda, 5)$. Το σημείο αυτό μπορεί να βρεθεί, γιατί οι δύο κύκλοι τέμνονται εφόσον $5 - 4 < K\Lambda < 5 + 4$.

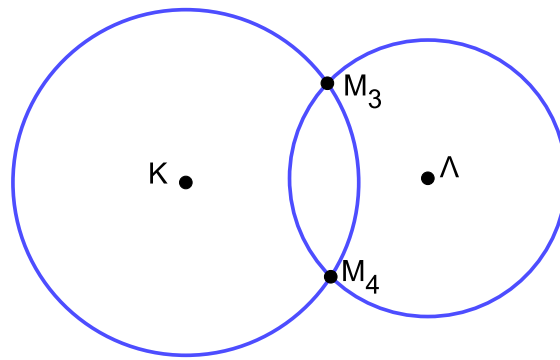
Σχεδιάζουμε τους δύο κύκλους.



Το M μπορεί να είναι στη θέση του M_1 ή του M_2 .

2^η περίπτωση: Το M απέχει 4 από το Λ και 5 από το K.

Τότε το M είναι το κοινό σημείο των δύο κύκλων $(K, 5)$ και $(\Lambda, 4)$. Με παρόμοιο συλλογισμό όπως στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε ότι το M μπορεί να είναι στη θέση του M_3 ή του M_4 , όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



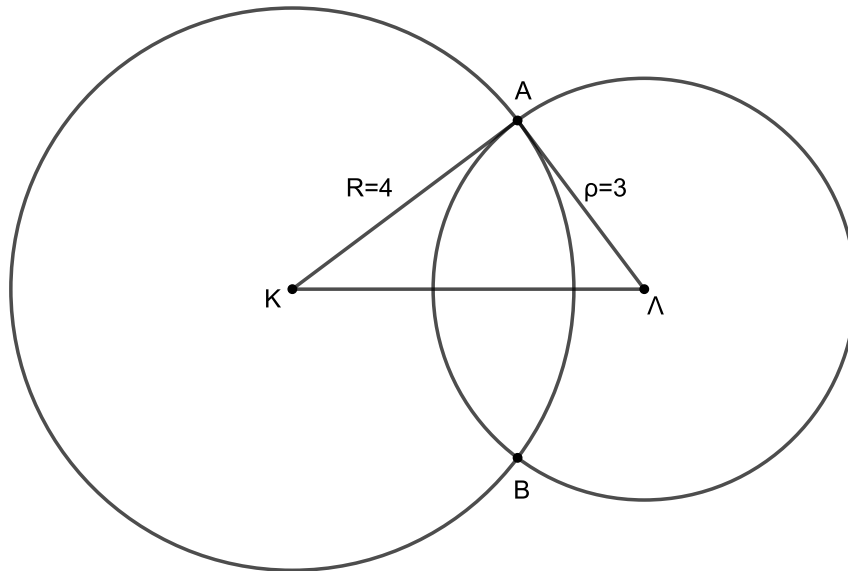
Τελικά οι θέσεις στο επίπεδο που μπορεί να βρίσκεται το M είναι τέσσερις.

ΛΥΣΗ

α) Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R = 4$, $\rho = 3$ και $K\Lambda = 5$.

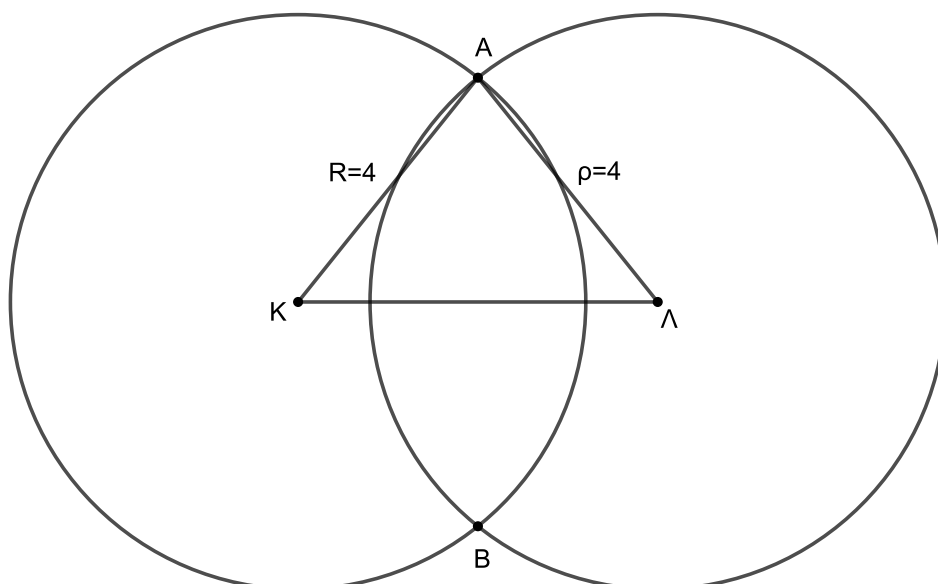
i. Έχουμε $R + \rho = 7$ και $R - \rho = 1$.

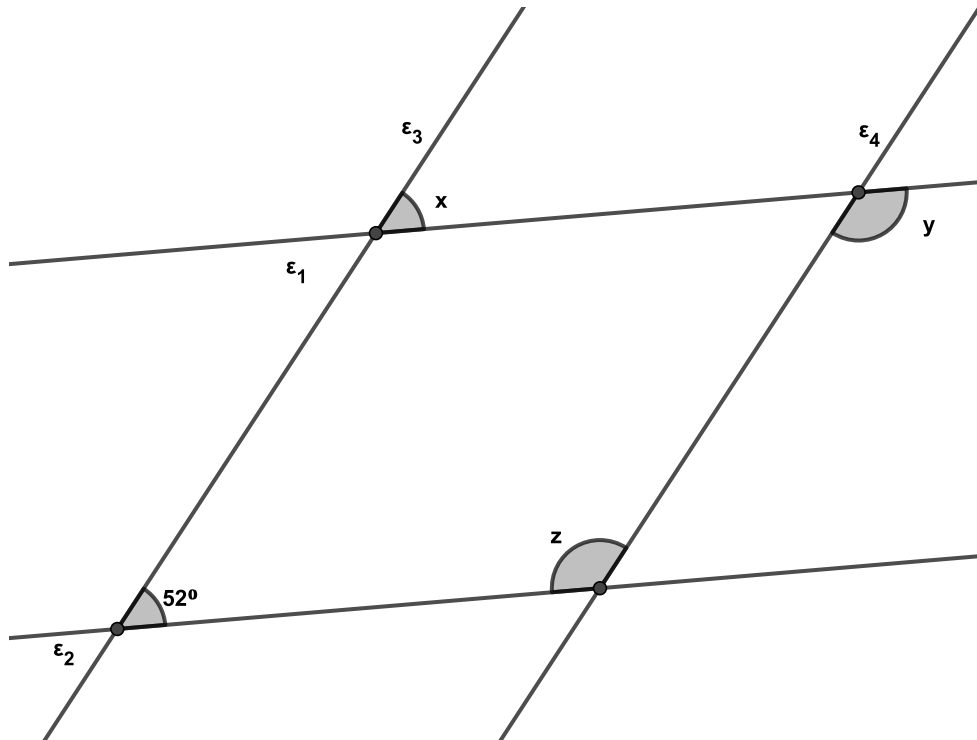
Αφού $K\Lambda < R + \rho$ και $K\Lambda > R - \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



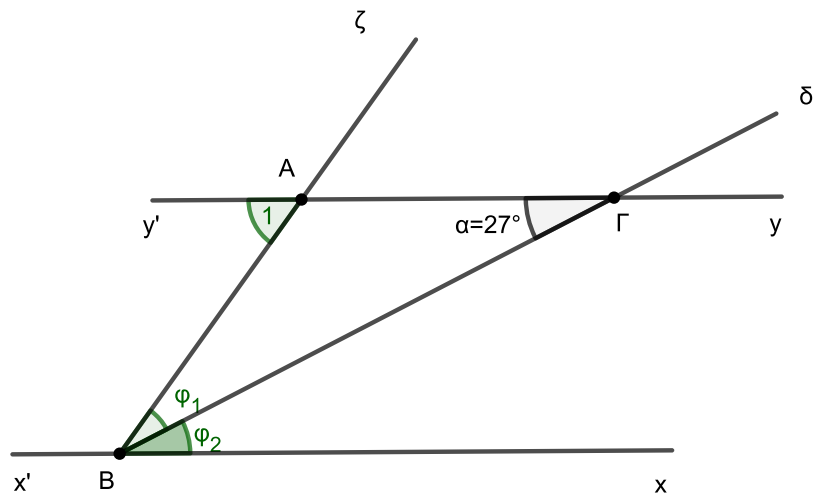
ii. Στο τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι $AK > AL$, αφού $AK = R = 4$ και $AL = \rho = 3$. Οπότε, οι απέναντι γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ και $\widehat{\Lambda KA}$ των άνισων πλευρών AK και AL αντίστοιχα θα είναι ομοίως άνισες. Δηλαδή, $\widehat{AK\Lambda} > \widehat{\Lambda KA}$.

β) Αν οι γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ και $\widehat{\Lambda KA}$ του τριγώνου $AK\Lambda$ γίνουν ίσες, τότε θα πρέπει οι απέναντι πλευρές τους AK και AL αντίστοιχα να είναι ίσες. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι $\rho = R = 4$. Άρα, το μήκος της ακτίνας ρ θα πρέπει να είναι ίσο με 4.





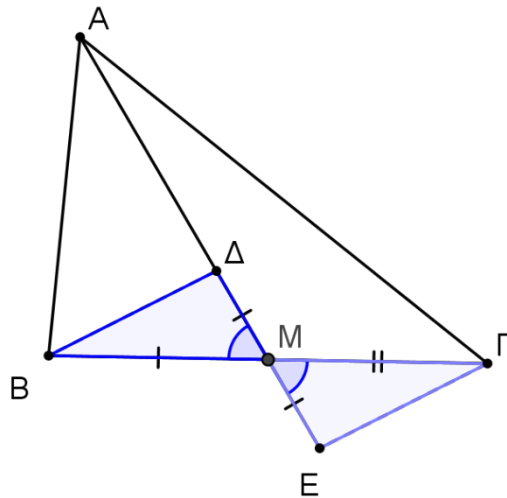
- α) Η γωνία $\hat{x}$ και η γωνία των 52° είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε_3 , άρα $\hat{x} = 52^\circ$.
- β) Η γωνία $\hat{z}$ και η γωνία των 52° είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_3 και ε_4 που τέμνονται από την ε_2 , άρα $\hat{z} = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$.
- γ) Η γωνία $\hat{z}$ και η γωνία $\hat{y}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε_4 , άρα $\hat{y} = \hat{z} = 128^\circ$.



α) Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\varphi}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $x'x$ και $y'y$ που τέμνονται από την ημιευθεία $B\delta$. Άρα $\hat{\varphi}_2 = 27^\circ$. Η ημιευθεία $B\delta$, από την υπόθεση είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}x$, άρα $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = 27^\circ$.

β) Για τη γωνία $A\hat{B}x$ ισχύει ότι: $A\hat{B}x = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 = 2 \cdot 27^\circ = 54^\circ$. Οι γωνίες $A\hat{B}x$ και $\hat{A}_1$ είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $x'x$ και $y'y$ που τέμνονται από την AB . Άρα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A}_1 = A\hat{B}x = 54^\circ$.

ΛΥΣΗ



α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι AM διάμεσος του τριγώνου ABΓ, άρα το M θα είναι μέσο του BΓ.

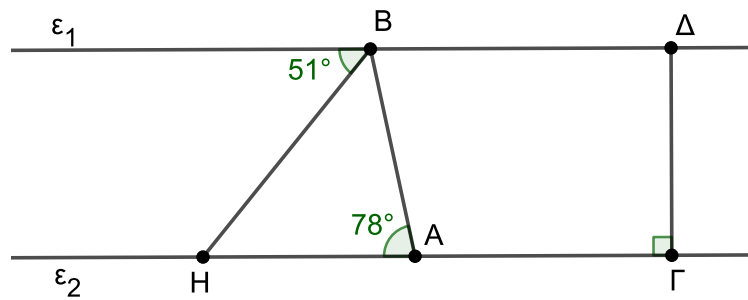
Τα τρίγωνα MBΔ και ΜΓΕ έχουν:

- $MB = ΜΓ$, αφού M μέσο του BΓ.
- $MD = ΜΕ$, από τα δεδομένα
- $\widehat{BMD} = \widehat{ΓME}$, ως κατακορυφήν γωνίες.

Άρα τα τρίγωνα MBΔ και ΜΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

β) Αφού τα τρίγωνα MBΔ και ΜΓΕ είναι ίσα από το α) ερώτημα, οι γωνίες $\widehat{BDM}$ και $\widehat{ΓEM}$ θα είναι ίσες, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους MB και ΜΓ αντίστοιχα.

γ) Τα τμήματα BΔ και ΓΕ είναι παράλληλα, γιατί τεμνόμενα από την ΑΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{BDM}$ και $\widehat{ΓEM}$ ίσες (από το β) ερώτημα).



α) Εφόσον η BH είναι διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{AB\epsilon_1}$ ισχύει ότι $\widehat{ABH} = \widehat{HB\epsilon_1} = 51^\circ$.

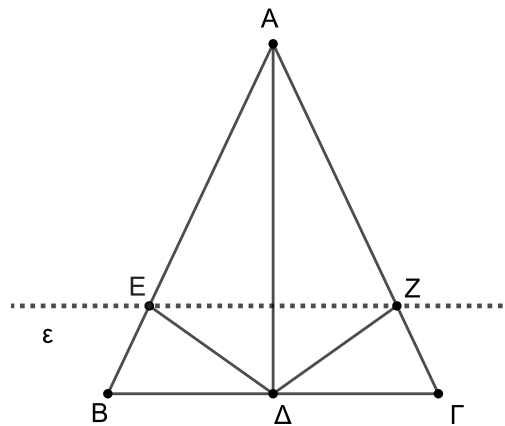
β) Η γωνία $\widehat{AB\epsilon_1} = \widehat{ABH} + \widehat{HB\epsilon_1} = 102^\circ$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $\widehat{AB\epsilon_1} = 102^\circ$ και $\widehat{BAH} = 78^\circ$ των ϵ_1 και ϵ_2 με τέμνουσα την AB είναι παραπληρωματικές, γιατί $\widehat{AB\epsilon_1} + \widehat{BAH} = 180^\circ$. Επομένως οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την ϵ_2 από την υπόθεση (εφόσον η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την ϵ_1 που είναι παράλληλη της ϵ_2 .

Άρα η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι ορθή.

ΛΥΣΗ

α)



i. $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων EZ και BΓ που τις τέμνει η AB.

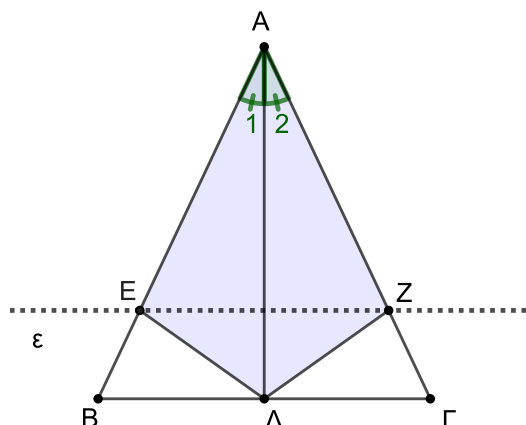
$\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EZ και BΓ που τις τέμνει η AG.

ii. Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ τότε θα είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του BΓ.

Αφού είναι $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{B}$ και $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{\Gamma}$ (από το ερώτημα i.), τότε λόγω της σχέσης (1) θα είναι $\widehat{A\hat{E}Z} = \widehat{A\hat{Z}E}$.

Οπότε το τρίγωνο AEZ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές.

β)



Τα τρίγωνα AED και AZD έχουν:

$AD = AD$ κοινή πλευρά

$AE = AZ$, διότι AEZ ισοσκελές τρίγωνο από προηγούμενο ερώτημα.

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

α) Οι γωνίες $\widehat{ABO}$ και $\widehat{ΓΔΟ}$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 που τέμνονται από την $ΒΔ$.

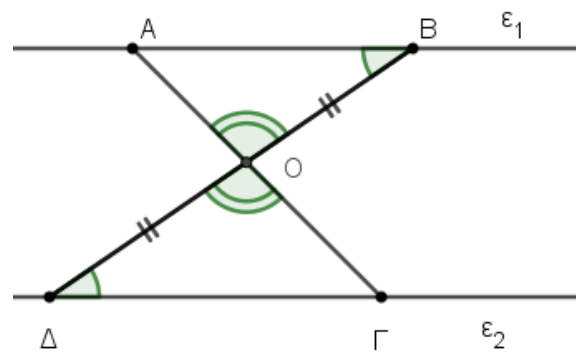
β) Τα τρίγωνα $ΑΒΟ$ και $ΓΔΟ$ έχουν:

$ΒΟ = ΟΔ$, από υπόθεση,

$\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{ΔΟΓ}$, ως κατακορυφήν,

$\widehat{ΑΒΟ} = \widehat{ΓΔΟ}$, από το α) ερώτημα.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

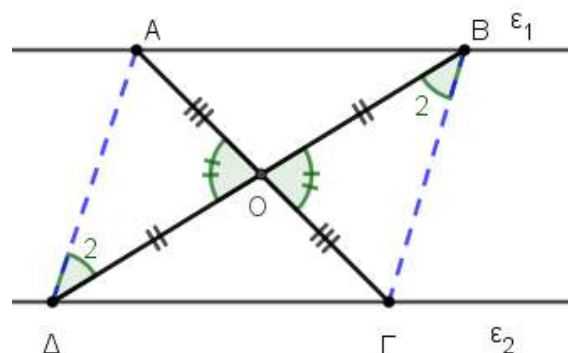


γ) Φέρνουμε τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$. Τα τρίγωνα $ΑΔΟ$ και $ΓΒΟ$ έχουν:

$ΑΟ = ΟΓ$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{ΑΒΟ}$ και $\widehat{ΓΔΟ}$ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων $ΑΒΟ$ και $ΓΔΟ$,

$ΟΔ = ΒΟ$, από υπόθεση,

$\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΒΟΓ}$, ως κατακορυφήν.

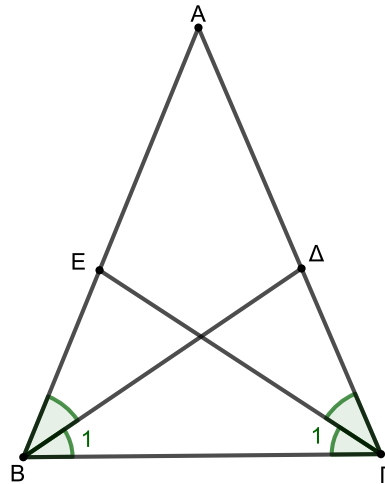


Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Επομένως, οι γωνίες $\widehat{Δ_2}$ και $\widehat{Β_2}$ είναι ίσες γιατί είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $ΑΟ$ και $ΟΓ$ αντίστοιχα.

Άρα, οι ευθείες $ΑΔ$ και $ΒΓ$ είναι παράλληλες γιατί τέμνονται από την $ΒΔ$ και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\widehat{Δ_2}$ και $\widehat{Β_2}$ ίσες.

α)

i.

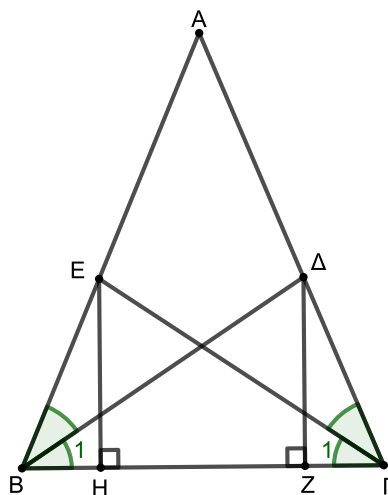


Στα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.

ii. Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.



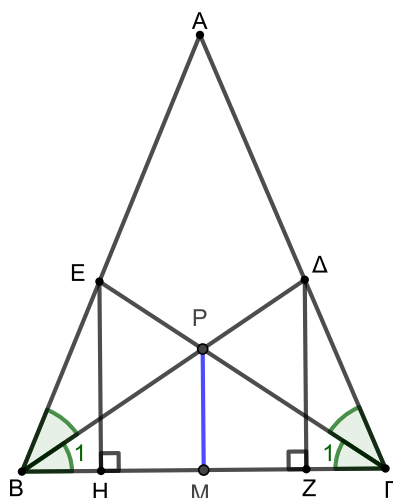
Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα ισχύει $\Gamma\Delta = BE$ (1) γιατί είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Στα τρίγωνα EBH και ΔΓΖ:

- $\hat{H} = \hat{Z} = 90^\circ$ ($EH \perp BG$ και $\Delta Z \perp BG$)
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ)
- $EB = \Delta\Gamma$ από τη σχέση (1)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και $EH = \Delta Z$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β) Έστω P το σημείο τομής των BΔ και ΓΕ και M το μέσο της πλευράς BG.



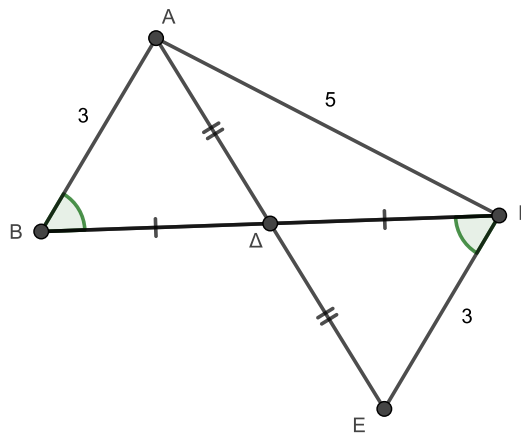
Επειδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ όπως αναφέρθηκε και στο α) ερώτημα, το τρίγωνο BPG είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο P. Το ευθύγραμμο τμήμα PM είναι διάμεσος της βάσης BG, αφού M είναι το μέσο του BG, επομένως θα είναι και ύψος, δηλαδή $PM \perp BG$. Άρα το τμήμα PM καθώς και τα τμήματα EH και ΔZ είναι κάθετα τμήματα στο ίδιο τμήμα BG, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

α)

i. Στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$:

- $AD = DE$ από υπόθεση.
- $BD = \Delta\Gamma$, διότι Δ μέσο της $B\Gamma$.
- $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Delta\Gamma}$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



ii. Η πλευρά $ΓΕ$ του τριγώνου $E\Gamma\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AB του τριγώνου $AB\Delta$, οπότε η πλευρά $ΓΕ$ έχει μήκος 3. Γιατί οι πλευρές $ΓΕ$ και AB βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{E\Delta\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta B}$ αντίστοιχα.

β) Ο μαθητής ακολούθησε τη διαδρομή $A\Delta E$, σε ευθεία γραμμή, και η εφαρμογή έδειξε ότι είχε διανύσει 8,5 χιλιόμετρα. Στο σχέδιο βλέπουμε ότι ακόμα και αν είχε πάει από το χωριό A στο χωριό Γ και από εκεί στο χωριό E που είναι μια πιο μακρινή διαδρομή από την ευθύγραμμη, θα είχε κάνει $5 + 3 = 8$ χιλιόμετρα. Αυτό μας δείχνει και η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο $A\Gamma E$.

$AE < A\Gamma + \Gamma E$ δηλαδή $AE < 5 + 3 = 8$. Οπότε δεν είναι δυνατό η διαδρομή AE να είναι 8,5 χιλιόμετρα, αφού θα πρέπει να είναι μικρότερη από 8 χιλιόμετρα.

44 Θέμα 2 - 12534

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A}_{εξ} = 140^\circ$. Επίσης είναι $\widehat{A} + \widehat{A}_{εξ} = 180^\circ$

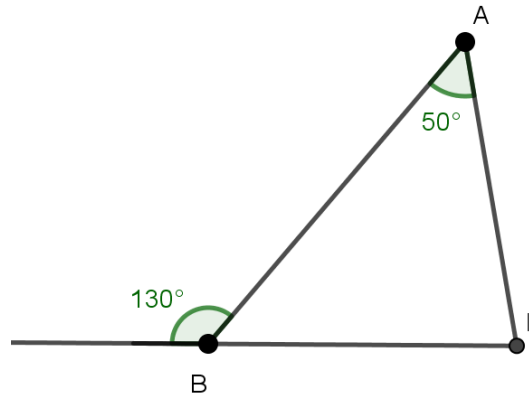
ή $\widehat{A} + 140^\circ = 180^\circ$, άρα $\widehat{A} = 40^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ οπότε $40^\circ + 70^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$

άρα η $\widehat{\Gamma} = 70^\circ = \widehat{B}$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ που βρίσκονται αντίστοιχα απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ και Β.

Εναλλακτικά: Μία άλλη λύση για το (β) ερώτημα, θα μπορούσε να βασιστεί

στην ισότητα: $\widehat{A}_{εξ} = \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ απ' όπου παίρνουμε $\widehat{\Gamma} = 70^\circ$ κ.λ.π.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\widehat{B}_{εξ} = 130^\circ$ και επιπλέον ισχύει $\widehat{B}_{εξ} + \widehat{B} = 180^\circ$, άρα $\widehat{B} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Δίνεται επιπλέον ότι $\widehat{A} = 50^\circ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$, οπότε $50^\circ + 50^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $\widehat{\Gamma} = 80^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ δείξαμε στο α) ερώτημα ότι $\widehat{A} = \widehat{B} = 50^\circ$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες και άρα είναι ισοσκελές. Στο ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, οπότε αφού είναι ίσες οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$, η βάση του ισοσκελούς είναι η πλευρά ΑΒ και οι ίσες πλευρές του είναι οι ΓΑ και ΓΒ.

46 Θέμα 2 - 12537

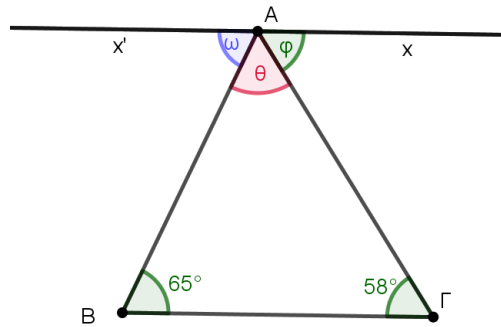
ΛΥΣΗ

α) Είναι $\widehat{B} + \widehat{B}_{\varepsilon\chi} = 180^\circ$ οπότε $\widehat{B} + 120^\circ = 180^\circ$ άρα $\widehat{B} = 60^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ από τα δεδομένα και λόγω του (α) ερωτήματος έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{A} + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \text{ ή } \widehat{A} + 90^\circ = 180^\circ \text{ άρα η } \widehat{A} = 90^\circ$$

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την Α.



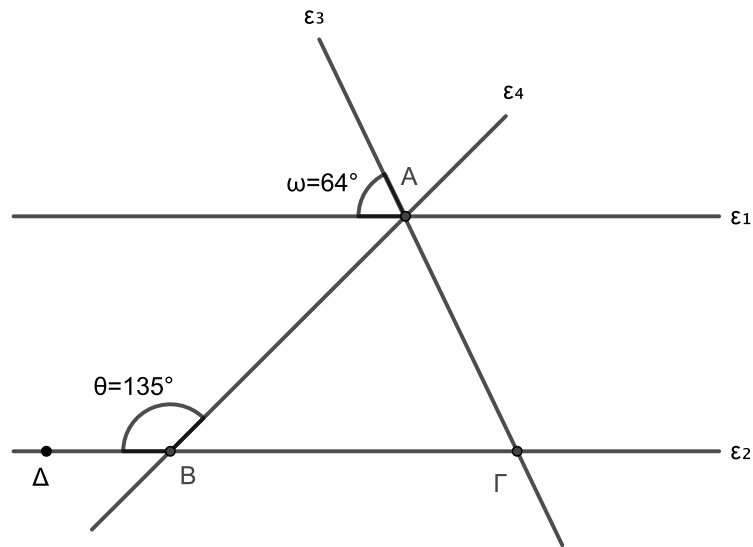
α)

- i. Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{B}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και $x'x$ που τέμνονται από την AB . Οπότε $\hat{\omega} = \hat{B} = 65^\circ$. Υπάρχει γωνία ίση με 65° , είναι η γωνία $\hat{\omega}$.
- ii. Οι γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και $x'x$ που τέμνονται από την AG . Οπότε $\hat{\phi} = \hat{\Gamma} = 58^\circ$. Υπάρχει γωνία ίση με 58° , είναι η γωνία $\hat{\phi}$.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι : $\hat{\omega} = 65^\circ$ και $\hat{\phi} = 58^\circ$. Η γωνία $\hat{\theta}$ είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του, έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $\hat{\theta} + 65^\circ + 58^\circ = 180^\circ$ δηλαδή $\hat{\theta} + 123^\circ = 180^\circ$ και τελικά $\hat{\theta} = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$.

ΛΥΣΗ

α)



Οι γωνίες $\hat{\theta} = 135^\circ$ και $\hat{\Gamma\hat{B}A}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, αφού το άθροισμά τους είναι η ευθεία γωνία $\hat{\Gamma\hat{B}\Delta}$. Επομένως:

$$135^\circ + \hat{\Gamma\hat{B}A} = 180^\circ \text{ ή } \hat{\Gamma\hat{B}A} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{\omega} = 64^\circ$ και $\hat{A\hat{\Gamma}B}$ είναι ίσες ως εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 τεμνόμενων από την ΑΓ.

$$\text{Άρα, } \hat{A\hat{\Gamma}B} = 64^\circ.$$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\hat{\Gamma\hat{B}A} + \hat{A\hat{\Gamma}B} + \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 45^\circ + 64^\circ + \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα, } \hat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ - 64^\circ = 71^\circ.$$

γ) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι οξείες, αφού στα ερωτήματα (α) και (β) υπολογίσαμε ότι $\hat{\Gamma\hat{B}A} = 45^\circ$, $\hat{A\hat{\Gamma}B} = 64^\circ$ και $\hat{B\hat{A}\Gamma} = 71^\circ$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

49 Θέμα 2 - 13437

α) Η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η γωνία των 140° είναι παραπληρωματικές, άρα $\hat{B} + 140^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{B} = 40^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η γωνία των 70° είναι ίσες ως εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν οι παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 τεμνόμενες από την $A\Gamma$. Άρα $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Όμως $\hat{B} = 40^\circ$ από το α) ερώτημα και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$, οπότε έχουμε $\hat{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ ή $\hat{A} = 70^\circ$.

50 Θέμα 2 - 12532

ΛΥΣΗ

α) Η $\widehat{\omega} = \widehat{A} = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Επίσης η $\widehat{\varphi} = \widehat{\Gamma} = 50^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ.

β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ λόγω του (α) έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ ή $40^\circ + 50^\circ + \widehat{AOB} = 180^\circ$ οπότε η $\widehat{AOB} = 90^\circ$ άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ.